Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

А. И. ЧАХТАУРИ

О КАНОНИЧЕСКИХ ПУЧКАХ ПРЯМЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 I 1948)

Фубини и Чех ([1], [2]) дали определение канонического пучка прямых для поверхности и для плоской сети. Полученные ими аналитические выражения канонического пучка прямых зависят в случае поверхности — от выбора конфигурации и от нормировки тензора сети (([1]), стр. 49, 67, 497), а в случае плоской сети — от выбора криволинейных координат и от нормировки тензора сети (([2]), стр. 173).

Настоящая работа ставит своей целью получить аналитические выражения канонического пучка прямых для поверхности и для плоской сети, не зависящие ни от выбора конфигурации, ни от выбора криволинейных координат, ни от нормировки тензора сети. Как следствия основного результата здесь приводятся инвариантные характеристики классических конфигураций, например конфигурации Вильчинского, конфигурации Фубини и т. д. Кроме того, здесь вводится понятие второй лапласовой прямой и дается геометрическое истолкование директрисы Вильчинского для плоской сети.

1. Рассмотрим поверхность трехмерного проективного пространства, нормализованную в смысле А. П. Нордена ([3]). Обозначим через x^α проективные координаты текущей точки поверхности, а ξ_α — тангенциальные координаты касательной плоскости в точке x^α. Пусть точки $y_i^\alpha = \partial_i x^\alpha - l_i x^\alpha$ определяют нормаль 2-го рода, а плоскости $\eta_{\alpha i} = \partial_i \xi_\alpha - \bar{l}_i \xi_\alpha$ — нормаль 1-го рода. Пусть, далее, G_{ij}^m и Γ_{ij}^m суть коэффициенты внутренних связностей 1-го и 2-го родов, соответственно, R_{ij} — тензор Ricci связности 1-го рода, b_{ij} — тензор асимптотической сети, t_i — чебышевский тензор (([4]), стр. 197) асимптотической сети относительно связности G_{ij}^m.

Для нормализованной поверхности мы вводим следующие тензоры:

$$\tau_i = -\frac{q^{ks}(\nabla_i b_{ks} - t_k b_{is})}{2J} \tag{1}$$

и

$$\nu_i = {}^1/_2\, \tilde{b}^{ks}(\nabla_i b_{ks} - 2t_k b_{is}) + \partial_i \lg J, \tag{2}$$

где

$$J = \tilde{b}^{ij}\tilde{b}^{ks}\tilde{b}^{mn}(\nabla_i b_{km} - t_k b_{im})(\nabla_j b_{sn} - t_s b_{in}),$$

$$q^{ij} = \tilde{b}^{ik}\tilde{b}^{is}(\bar{R}_{(ks)} - {}^1/_2\, \tilde{b}^{mn}\bar{R}_{(mn)} b_{ks}),$$

$$\bar{R}_{(ks)} = R_{(ks)} - {}^1/_2\, \nabla_{(kts)} + {}^1/_4\, t_k t_s.$$

Легко проверить, что тензоры τ_i и ν_i не зависят от перенормирования тензора b_{ij}.

Первым основным результатом данной работы является представление произвольной прямой канонического пучка в виде пересечения плоскостей

$$\overline{\eta}_{\alpha i} = \eta_{\alpha i} + q_i \xi_\alpha, \tag{3}$$

где

$$q_i = -\lambda\tau_i + (\lambda + {}^1/_2)\nu_i, \tag{4}$$

а λ — параметр канонического пучка ([2], стр. 100).

В частности, для директрисы Вильчинского ($\lambda = -{}^1/_2$)

$$q_i = {}^1/_2\,\tau_i, \tag{5}$$

а для проективной нормали Фубини ($\lambda = 0$)

$$q_i = {}^1/_2\,\nu_i. \tag{6}$$

Полярно-сопряженная прямая рассматриваемой канонической прямой относительно соприкасающейся поверхности Lie (т. е. каноническая прямая 2-го рода) определяется точками

$$z_i^\alpha = y_i^\alpha + p_i x^\alpha, \tag{7}$$

где

$$p_i = {}^1/_2\, t_i - \lambda\tau_i + (\lambda + {}^1/_2)\nu_i. \tag{8}$$

Нормализацию будем называть канонической, если за нормали 1-го и 2-го родов приняты канонические прямые 1-го и 2-го родов, соответственно. Для канонической нормализации характерны следующие равенства:

$$t_i = 0, \qquad \lambda\tau_i - (\lambda + {}^1/_2)\nu_i = 0. \tag{9}$$

В частности, для нормализации Вильчинского ($\lambda = -{}^1/_2$) и Фубини ($\lambda = 0$) получаются следующие характерные условия соответственно:

$$t_i = 0, \quad \tau_i = 0; \tag{10}$$

$$t_i = 0, \quad \nu_i = 0. \tag{11}$$

В случае нормализации Фубини, при соответствующей нормировке тензора b_{ij}, из наших формул (4) получаются результаты Фубини и Чеха ([1], стр. 497).

2. Формулы (8) сохраняются для любой плоской сети, нужно только заменить b_{ij} тензором произвольной плоской сети.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы плоскость была нормализована (3) каноническими прямыми некоторой плоской сети, выражается равенством:

$${}^1/_2\, t_i - \lambda\tau_i + (\lambda + {}^1/_2)\nu_i = 0. \tag{12}$$

Исходя из понятия лапласовой прямой относительно данной плоской сети ([2], стр. 150), введем (по принципу двойственности) понятие лапласовой точки относительно плоской конгруенции прямых. Прямую, соединяющую соответствующие лапласовы точки конгруенции касательных к линиям сети, будем называть второй лапласовой прямой.

Вторым основным нашим результатом является представление второй лапласовой прямой точками

$$z_i^\alpha = y_i^\alpha + \tau_i x^\alpha, \tag{13}$$

где точки y_i^α определяют лапласову прямую.

Это представление дает возможность дать геометрическое истолкование директрисы Вильчинского. Именно, оказывается, что две лапласовы прямые, прямая, соединяющая их точки пересечения с точкой x^α, и директриса образуют гармоническую четверку прямых.

Наконец, заметим, что из наших формул (8) переходом к сетевой системе координат (когда линии сети приняты за координатные линии) и нормированием тензора сети соответствующим образом получаются известные формулы Фубини и Чеха ((2), стр. 173) для канонического пучка плоской сети.

Тбилисский государственный университет
им. И. В. Сталина

Поступило
8 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Fubini, E. Čech, Geometria proettiva differenziale, Bologna, 1926—27. [2] G. Fubini et E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931. [3] А. П. Норден, ДАН, **49**, № 8 (1945); **53**, № 6 (1946). [4] Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 4 (1937).