Доклады Академии Наук СССР
1948 Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 I 1948)

§ 1. Пусть a и b — два бесконечных кардинальных числа, $a \leqslant b$. По определению, данному П. С. Александровым и П. С. Урысоном (1), топологическое пространство R называется компактным в отрезке мощностей $[a,b]$ или просто $[a,b]$-компактным, если всякое множество $M \subseteq R$ любой регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, имеет в R точку полного накопления.

Это свойство, служащее определением $[a,b]$-компактности, будем для краткости называть свойством **А**.

В работе (1) доказано, что свойство **А** эквивалентно каждому из следующих свойств **Б**, **В***:

Свойство **Б**. Каждая вполне упорядоченная последовательность непустых убывающих замкнутых множеств пространства R, имеющая любой регулярный порядковый тип* θ, $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$, обладает непустым пересечением.

Свойство **В***. Каждое покрытие** Σ пространства R, имеющее любую регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$, содержит подпокрытие мощности $< m$.

Эти результаты делают естественными следующие определения. Кардинальное число m называется a-регулярным, если его нельзя представить в виде суммы, каждое слагаемое которой есть кардинальное число $< m$ и число которых $< a$. Порядковое число θ называется a-регулярным, если оно не конфинально никакому порядковому числу $< \omega(a)$.

Рассмотрим следующие свойства какого-либо топологического пространства.

Свойства $\mathbf{А}^a$ и $\mathbf{Б}^a$ получаются из **А** и **Б**, если в них потребовать, чтобы m и θ были a-регулярны (а не непременно регулярны).

Свойство $\mathbf{В}^0$. Всякое покрытие пространства R любой мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, содержит подпокрытие мощности $< a$.

Свойства $\mathbf{В}^a$, соотв., **В** получаются из $\mathbf{В}^0$, если в формулировке последнего потребовать, чтобы мощность m была a-регулярной, соотв., регулярной.

Замечание 1. Аналогично можно было бы определить свойства $\mathbf{А}^0$ и $\mathbf{Б}^0$, отказавшись от требования регулярности входящих в формулировку свойства **А**, соотв., **Б** кардинального числа m, соотв., порядкового числа θ.

---

* Наименьшее порядковое число данной мощности m обозначается через $\omega(m)$.

** Под покрытием Σ (пространства R) понимается система открытых множеств пространства R, сумма которых равна R.

Назовем какую-либо систему множеств a-центрированной, если всякая подсистема этой системы, имеющая мощность $< a$, обладает непустым пересечением.

Для наших целей существенно сформулировать еще следующее

Свойство $(\mathbf{БВ})^0$. Всякая вполне упорядоченная a-центрированная система убывающих замкнутых множеств пространства R, имеющая любой порядковый тип θ, $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$, обладает непустым пересечением.

Свойство $(\mathbf{БВ})^a$, соотв., $(\mathbf{БВ})$ получится из $(\mathbf{БВ})^0$, если последнее условие сформулировать лишь для a-регулярных, соотв., для регулярных θ.

Замечание 2. Положить в формулировке любого из перечисленных свойств $b = \infty$, по определению, значит потребовать, чтобы соответствующее свойство выполнялось для любого кардинального числа $m \geqslant a$, соотв., для любого порядкового числа $\theta \geqslant \omega(a)$, удовлетворяющих, где нужно, требованию регулярности или a-регулярности. В частности, можно говорить об $[a, \infty]$-компактных пространствах, т. е. пространствах, в которых каждое множество любой регулярной мощности $m \geqslant a$ имеет точку полного накопления; $[\aleph_1, \infty]$-компактные пространства называются финально-компактными.

§ 2. Первым основным результатом настоящей работы является следующая теорема:

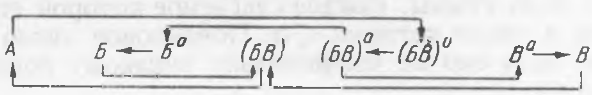
Теорема 1. *Для любых a и b, $a \leqslant b \leqslant \infty$, свойства*

$$\mathbf{А}, \mathbf{А}^a; \quad \mathbf{Б}, \mathbf{Б}^a; \quad (\mathbf{БВ}), (\mathbf{БВ})^a, (\mathbf{БВ})^0; \quad \mathbf{В}, \mathbf{В}^a$$

эквивалентны между собой. Если b есть a-регулярное кардинальное число, а также если $b = \infty$, то перечисленным свойствам эквивалентно и свойство $\mathbf{В}^0$.

Замечание 3. Простые примеры показывают, что $[a,b]$-компактное пространство даже при $b = \infty$ может не обладать ни свойством $\mathbf{А}^0$, ни свойством $\mathbf{Б}^0$. С другой стороны, я не знаю ни одного примера $[a,b]$-компактного пространства, которое не обладало бы свойством $\mathbf{В}^0$ (кроме тривиального случая, когда $a = b$ есть иррегулярное кардинальное число).

Доказательство теоремы 1 проводится по следующей схеме (логическое следование одного свойства из другого обозначается стрелкою), содержащей в себе эквивалентность фигурирующих в ней свойств:



После этого свойство $\mathbf{А}^a$ следующим образом выводится из свойства $\mathbf{А}$. Пусть $M \subseteq R$ есть какое-либо множество a-регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$; очевидно, можно ограничиться случаем, когда m иррегулярно. Тогда M можно представить в виде суммы попарно непересекающихся подмножеств M_α, число которых k регулярно, $a \leqslant k < m$, а каждое из множеств M_α имеет регулярную мощность m_α, $a \leqslant m_\alpha < m$. Обозначим через ξ_α точку полного накопления множества M_α. Точки ξ_α (среди которых могут быть и совпадающие) образуют так называемое „обозначенное" множество E ((²), стр. 25) регулярной мощности k. Распространяя на такие множества свойство $\mathbf{А}$ (это делается легко), получим точку полного накопления обозначенного множества E, которая оказывается и точкой полного накопления заданного множества M.

§ 3. Теорема 2. *Пусть F и Φ — два непересекающиеся замкнутые множества регулярного пространства R. Если множества F и Φ (с топологией, взятой из R) финально-компактны, то они имеют в R непересекающиеся окрестности.*

Следствие. *Всякое регулярное финально-компактное пространство нормально.*

Легко привести пример регулярного не нормального $[\aleph_2,\infty]$-компактного пространства.

§ 4. Пространство R называется локально $[a, b]$-компактным, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой $[a,b]$-компактно.

Теорема 3. *Для того чтобы хаусдорфово пространство R было локально $[a,b]$-компактно, необходимо и достаточно, чтобы присоединением одной точки ξ его можно было дополнить до $[a, b]$-компактного пространства (среди этих пополнений $R \cup \xi$ имеется одно такое, что тождественное отображение его на всякое пополнение этого рода непрерывно).*

Замечание 4. В регулярных $[a,b]$-компактных пространствах все открытые множества локально $[a,b]$-компактны. С другой стороны, каждое T_1-пространство присоединением одной точки может быть, как известно, дополнено до бикомпактного T_1-пространства.

§ 5. Говорят, что какое-либо свойство выполнено в данном пространстве R наследственно, если им обладает любое множество $M \subseteq R$ (рассматриваемое как топологическое пространство).

Теорема 4. *Для того чтобы пространство R было наследственно $[a,b]$-компактно, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы каждое открытое в R множество было $[a, b]$-компактно.*

Следствие. *Для того чтобы пространство R было наследственно $[a,\infty]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы из любой системы Σ мощности $m \geqslant a$ открытых в R множеств можно было выделить подсистему мощности $< a$, имеющую ту же сумму, что и вся система Σ.*

В дальнейшем полагаем, что a есть регулярное кардинальное число.

Рассмотрим следующее

Свойство S_{aa}. Число различных замкнутых множеств, являющихся элементами какой-либо вполне упорядоченной системы убывающих замкнутых множеств данного пространства R, меньше числа a.

Нетрудно видеть, что свойство S_{aa} — наследственное. Из S_{aa} далее легко следует (наследственная) $[a,\infty]$-компактность пространства R. С другой стороны, если пространство R наследственно $[a,a]$-компактно, то оно обладает свойством S_{aa}. Отсюда вытекает

Теорема 5. *Наследственная $[a, a]$-компактность при регулярном a уже влечет за собой наследственную $[a,\infty]$-компактность, и она вполне характеризуется свойством S_{aa}.*

§ 6. Назовем какую-нибудь точку $\xi \in R$ точкой a-накопления множества $M \subseteq R$, если пересечение множества M с любой окрестностью точки ξ имеет мощность $\geqslant a$. Множество содержащихся в M точек a-накопления множества M обозначим через M_a.

Теорема 6. *Пространство R тогда и только тогда наследственно $[a,\infty]$-компактно, если для любого $M \subseteq R$ множество $M \setminus M_a$ имеет мощность $< a$.*

При этом если R наследственно $[a,\infty]$-компактно, то каждая точка множества M_a есть точка a-накопления этого множества (т. е. всегда $(M_a)_a = M_a$).

Замечание 5. Имеются примеры (нерегулярных) наследственно финально-компактных пространств, в которых существуют несчетные вполне упорядоченные системы попарно различных между собой возрастающих замкнутых множеств. Мне неизвестно, можно ли построить пример регулярного наследственно финально-компактного пространства с таким свойством.

Теорема 7. *Для того чтобы регулярное $[a,\infty]$-компактное пространство было наследственно $[a,\infty]$-компактным, необходимо* *и достаточно, чтобы всякое открытое множество этого пространства было суммой замкнутых в R множеств, взятых в числе $< a$.*

Легко видеть, что всякое наследственно бикомпактное (даже всякое наследственно компактное) хаусдорфово пространство состоит из конечного числа точек. С другой стороны, существуют наследственно бикомпактные T_1-пространства любой мощности.

Теорема 8. *Пусть $a = \aleph_{\tau+1}$ (т. е. a есть регулярное и при этом не эксорбитантное кардинальное число). Всякое наследственно $[a, \infty]$-компактное хаусдорфово пространство имеет мощность $\leqslant 2^{\aleph_\tau}$.*

Теорема 8 представляет собой обобщение теоремы П. С. Александрова и П. С. Урысона ([1]) о том, что мощность бикомпакта, в котором все открытые множества являются множествами типа F_σ, не превосходит мощность континуума, и доказывается совершенно так же, как и эта последняя теорема.

В заключение выражаю сердечную благодарность П. С. Александрову за постановку решенных выше проблем и за большую помощь при редактировании этой работы.

Поступило
2 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Alexandroff et P. Urysohn, Verh. d. Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, sec. 1, deel 14, No. 1 (1929). [2] П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947.