Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

Действительный член АН УзССР Т. А. САРЫМСАКОВ и М. СУЛТАНОВА

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В настоящей статье нами доказывается известный в теории вероятностей закон повторного логарифма для дискретных цепей Маркова с конечным числом возможных состояний.

Доказательство распадается на два этапа. Сначала при помощи приема, указанного В. Доблиным ([5]), исследование последовательности связанных в цепь переменных u_m сводится к исследованию последовательности независимых величин $u^{(\mu)}$. Величины $u^{(\mu)}$ в отличие от величин u_m не ограничены,что мешает непосредственному применению к ним теоремы А. Н. Колмогорова ([1]). Второй этап доказательства заключается в замене последовательности величин $u^{(\mu)}$ последовательностью ограниченных величин $v^{(\mu)}$, к которым теорема А. Н. Колмогорова применима.

Для частного случая двух состояний прямое доказательство закона повторного логарифма для цепей Маркова было дано Т. А. Сарымсаковым ([4]). Во всем дальнейшем изложении употребляемые нами без определения понятия и обозначения мы заимствуем из работ А. Н. Колмогорова ([2]) и В. И. Романовского ([3]).

Рассмотрим последовательность случайных переменных

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots, \tag{1}$$

связанных в простую, однородную цепь Маркова, каждая из которых может принимать одно из значений числового ряда

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \tag{2}$$

остающегося одним и тем же для всех членов последовательности (1).

Мы предположим, что матрица P, составленная из переходных вероятностей, т. е. матрица

$$P = \| p_{ij} \| \qquad (i,j=\overline{1,n}),$$

является неразложимой и примитивной. Известно ([2]), что исследование всех других случаев принципиально может быть сведено к этому основному случаю.

Через S_k мы обозначим сумму центрированных значений переменных $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{k-1}$, т. е. сумму

$$\sum_{h=0}^{k-1}(u_h - a_h), \qquad (a_h = Eu_h).$$

Обозначим затем через B_k дисперсию суммы S_k. Тогда закон повторного логарифма можно формулировать следующим образом:

Теорема. 1) *Каковы бы ни были $\eta > 0$ и $\delta > 0$, всегда можно указать натуральное число N такое, что вероятность выполнения одного, по крайней мере, из неравенств*

$$S_k > (1+\delta)\sqrt{2B_k \lg\lg B_k} \quad (k=N, N+1, \ldots, N+p) \tag{3}$$

будет не менее η для всякого p.

2) *Каковы бы ни были $\eta > 0$, $\delta > 0$ и m, можно указать натуральное число p такое, что вероятность выполнения всех неравенств*

$$S_k < (1-\delta)\sqrt{2B_k \lg\lg B_k} \quad (k=m, m+1, \ldots, m+p) \tag{4}$$

будет не менее η.

Пусть первая из случайных величин $u_1, u_2, \ldots$, которая принимает значение x_1 будет u_{n_0}; следующая из них, которая принимает опять значение x_1, будет u_{n_1}, и т. д. Числа $m_1 = n_1 - n_0$, $m_2 = n_2 - n_1, \ldots$, $m_\mu = n_\mu - n_{\mu-1}, \ldots$, будут, очевидно, случайными и могут принимать значения из натурального ряда чисел, причем вероятность, что m_μ примет значение $t > 1$, равна (независимо от μ!):

$$Q_t = \sum_{\alpha,\beta=2}^{n} p_{0\alpha} q_{\alpha\beta}^{(t-2)} p_{\beta_1}, \tag{5}$$

где $q_{\alpha\beta}^{(t-2)}$ представляет элемент строки α и столбца β $(t-2)$-й степени матрицы

$$P_{11} = \begin{pmatrix} p_{22}, & p_{23}, & \ldots, & p_{2n} \\ p_{32}, & p_{33}, & \ldots, & p_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n2}, & p_{n3}, & \ldots, & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой Перрона [6], мы можем написать

$$q_{\alpha\beta}^{(n)} = \sum_{i=1}^{s} B_{\alpha\beta}^{(i)}(h)\, \lambda_i^{(n)}, \tag{6}$$

где $B_{\alpha\beta}^{(i)}(h)$ — многочлен от h степени меньшей, чем кратность корня λ_i, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — корни матрицы P_{11}. Обозначим через λ_1 наибольший из этих корней. В силу неразложимости матрицы P $\lambda_1 < 2$ (см. [3]). Выбрав λ под условием $\lambda_1 < \lambda < 1$, легко получить из (6), что

$$Q_t < C\lambda^t, \tag{7}$$

где C — константа. Формула (7) показывает, что Q_t убывает не медленнее некоторой геометрической прогрессии.

Обозначим теперь

$$u^{(0)} = \sum_{h=0}^{n_0-1} (u_h - a_h),$$

$$u^{(\mu)} = \sum_{h=n_{\mu-1}}^{n_\mu - 1} (u_h - a_h), \quad \mu = 1, 2, \ldots.$$

Легко видеть, что случайные переменные $u^{(0)}$, $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots$ независимы между собой. При этом

$$|u^{(\mu)}| \leqslant A m_\mu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где A обозначает максимум абсолютных величин $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$.

Очевидно, что при любом $\mu \geqslant 0$

$$S_{n_\mu} = u^{(0)} + u^{(1)} + \ldots + u^{(\mu)}.$$

Если же номер k не имеет вида $k = n_\mu$, то

$$S_k = u^{(0)} + u^{(1)} + \ldots + u^{(\mu_k)} + r_k,$$

где μ_k определяется из

$$n_{\mu_k} \leqslant k < n_{\mu_k + 1}$$

и

$$r_k = \sum_{h = n_{\mu_k}}^{k-1} (u_h - a_h).$$

Ясно, что при этом

$$|r_k| \leqslant A m_{\mu_k + 1}. \tag{9}$$

Положим, наконец,

$$\begin{aligned} v^{(\mu)} &= u^{(\mu)}, \quad \text{если} \quad |u^{(\mu)}| \leqslant A\mu^{1/2}, \\ v^{(0)} &= 0, \quad \text{если} \quad |u^{(\mu)}| > A\mu^{1/2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Легко установить, что величины $v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots$ независимы между собой.

Из неравенства (7) легко выводится

Лемма 1. *Ряд*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} P(|m_\mu| > \mu^{1/2}) \tag{11}$$

сходится.

В силу (8) и (10) отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} P(v^{(\mu)} \neq u^{(\mu)}). \tag{12}$$

Из того же неравенства (7) путем несколько более сложных выкладок выводится

Лемма 2. *Пусть b есть дисперсия величин $u^{(\mu)}$ $(\mu \geqslant 1)$, а b_μ — дисперсия величин $v^{(\mu)}$. Тогда*

$$b_\mu \to b \quad \textit{при} \quad \mu \to \infty.$$

Рассмотрим теперь суммы

$$S'_\mu = v^{(0)} + v^{(1)} + \ldots + v^{(\mu)}$$

и обозначим их дисперсии B'_μ. В силу леммы 2

$$B'_\mu \to \infty \quad \text{при } \mu \to \infty$$

и

$$|v^{(\mu)}| \leqslant A\mu^{1/3} = o\left(\sqrt{\frac{B'_\mu}{\log\log b'_\mu}}\right).$$

Поэтому, к суммам S'_μ применима непосредственно теорема А. Н. Колмогорова (2); эти суммы заведомо подчиняются закону повторного логарифма. В силу сходимости ряда (12) и леммы 2 суммы

$$S_{n_\mu} = u^{(0)} + u^{(1)} + \ldots + u^{(\mu)}$$

тоже удовлетворяют закону повторного логарифма.

Остается перейти к суммам S_k с индексами k, пробегающими подряд все целые значения. Этот переход, заканчивающий доказательство теоремы, осуществляется при помощи леммы 1 и неравенства (9).

Поступило
24 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Kolmogoroff, Math. Ann., **101**, 126 (1929). [2] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, сек. А, 1, в. 3 (1937). [3] V. Romanovsky, Acta Math., **66**, 147 (1935). [4] Т. А. Сарымсаков, Тр. САГУ, в. 5, 2 (1945). [5] V. Doeblin, Rev. Math. de l'Union Interbolkanique, **11**, 1 (1938). [6] O. Perron, Math. Ann., **64** (1907).