Доклады Академии Наук СССР
1948 Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 XII 1947)

Метод наименьших квадратов можно сформулировать следующим образом. Пусть ставится задача об отыскании в сепарабельном гильбертовом пространстве H элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, удовлетворяющих двум системам уравнений:

$$L_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l; \tag{1}$$

$$G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где L_i, G_i — линейные операторы и b_i — данные элементы из H. Исходя из последовательности $\{\chi_1^k, \chi_2^k, \ldots, \chi_m^k\}$ решений уравнений (1), мы строим приближенное решение системы уравнений (1) и (2) в виде:

$$x_i^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} a_k^{(p)} \chi_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где $a_k^{(p)}$ — числа, определяемые из условия

$$\sum_{i=1}^{n} \| G_i(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_m^{(p)}) - b_i \|^2 = \text{minimum}. \tag{3}$$

В ряде работ акад. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов применяли метод наименьших квадратов к приближенному решению дифференциальных и интегральных уравнений ([2], [3]). М. Кравчук ([3]) также использует этот метод, рассматриваемый им как частный случай общего „метода моментов".

Акад. Л. С. Лейбензон в своей монографии ([1]) применил метод наименьших квадратов к некоторым конкретным задачам теории упругости.

В настоящей заметке мы сформулируем некоторые полученные нами результаты, относящиеся к сходимости метода наименьших квадратов.

Последовательность решений $\{\chi_1^k, \chi_2^k, \ldots, \chi_m^k\}$ уравнений (1) мы будем называть абсолютно-полной, если выполнено следующее условие: каковы бы ни были решение $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ уравнений (1) и число $\varepsilon > 0$, можно найти натуральное число p и постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \| G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) - G_i(\chi_1^{(p)}, \chi_2^{(p)}, \ldots, \chi_m^{(p)}) \|^2 < \varepsilon^2,$$

где

$$\chi_i^{(p)} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_i^k, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Лемма 1. *Метод наименьших квадратов сходится, если выполнены следующие условия:*

A. *Последовательность* $\{\chi_1^k, \chi_2^k, \ldots, \chi_m^k\}$ *абсолютно-полная.*

B. *Система уравнений* (1) *и* (2) *допускает решение, и притом единственное.*

C. *Если* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *удовлетворяют уравнениям* (1), *то*

$$\sum_{i=1}^{m} \| x_i \|^2 \leqslant K^2 \sum_{i=1}^{n} \| G_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \|^2, \quad K = \text{const}.$$

D. *Условие* (3) *определяет постоянные* $a_k^{(p)}$ *единственным образом.*

Лемма 2. *Если* $m = n$, *то условие* D *есть следствие условий* A, B, C.

Из леммы 2 непосредственно вытекает сходимость метода наименьших квадратов для линейного уравнения $Ax = b$, если операторы A и A^{-1} — ограниченные. С некоторыми видоизменениями метод применим и тогда, когда A^{-1} не существует, но оператор A допускает регуляризацию* и уравнение $Ax = 0$ имеет только конечное число линейно независимых решений. Из сказанного следует, что метод наименьших квадратов всегда применим к интегральным уравнениям, как фредгольмовским **, так и сингулярным (содержащим неизвестную под знаком главного значения интеграла) с отличным от нуля символом ([5]), одномерным или многомерным — безразлично.

Применяя метод наименьших квадратов к задачам математической физики, мы будем под уравнениями (1) понимать дифференциальные уравнения задачи, а под уравнениями (2) — уравнения, выражающие условия на границе. Перечислим полученные нами в этом направлении результаты.

1. Если задача состоит в отыскании одной или нескольких аналитических функций, голоморфных в некоторой области, то построение полной системы функций, в соответствии с условием A, может быть произведено на основе известной теоремы J. Walsh'a ([6]) о разложении функции, голоморфной в области и непрерывной в замкнутой области, в ряд по рациональным дробям, сходящийся в замкнутой области. Нами были рассмотрены задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа на плоскости, основные плоские задачи теории упругости и

---

* Мы говорим, что оператор A допускает регуляризацию, если существует ограниченный линейный оператор M такой, что $MA = E + T$, где E — тождественный, а T — вполне непрерывный оператор.

** О применимости метода наименьших квадратов к уравнениям типа Фредгольма см. ([4]).

смешанная плоская задача теории потенциала. Во всех перечисленных задачах устанавливается сходимость метода наименьших квадратов в среднем на контуре и равномерная внутри области*.

Определяя подходящим образом норму, можно добиться сходимости, равномерной в замкнутой области, приближенного решения и любого числа его производных к точному решению и его соответствующим производным.

2. Нами была рассмотрена задача Дирихле для колебательного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2 u=0 \tag{4}$$

в случае односвязной конечной области.

Пользуясь одной формулой И. Н. Векуа (8), мы установили, что последовательность

$$\operatorname{Im}(k\rho)\cos m\vartheta, \quad \operatorname{Im}(k\rho)\sin m\vartheta, \quad m=0, 1, 2, \ldots,$$

где $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, — полная в классе решений уравнения (4), регулярных в односвязной конечной области. Характер сходимости метода наименьших квадратов тот же, что и в случае задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

3. Аналогичные результаты получаются для задач Дирихле и Неймана в пространстве.

Ленинградский государственный университет

Поступило 29 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Вариационные методы решения задач теории упругости, 1943. [2] Н. М. Крылов, Юбил. сб., изд. АН СССР, 1947. [3] М. Кравчук, Застосувания способу моментів до розвъязанья лінійних дифференціальных та інтегральных рівнянь, изд. Укр. АН, Киев, 1936. [4] M. Krawtchouk, C. R., **188**, 978 (1929). [5] С. Г. Михлин, ДАН, **29**, № 5 (1938). [6] J. Walsh, Math. Ann., **96**, 442 (1926/27). [7] M. Picone, Rend. Acad. Lincei, ser. 5, **31** (1922). [8] И. Н. Векуа, ДАН **16**, № 3 (1937).

* Этот результат для случая задачи Дирихле содержится также в статье M. Picone (7), который, однако, налагает некоторые дополнительные ограничения на контур области.