Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ИЗОМЕТРИЯ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1947)

Точка выпуклого множества называется экстремальной, если она не является серединой какого-либо отрезка, принадлежащего этому множеству.

В этой статье мы исходим из следующего простого и очевидного предложения:

А. *Взаимно-однозначное и линейное соответствие между двумя выпуклыми множествами индуцирует взаимно-однозначное соответствие между совокупностями экстремальных точек этих выпуклых множеств.*

Мы будем в основном придерживаться терминологии С. Банаха ([1]). Через E_1 и E_2 мы обозначим пространства типа (B), через S_1 и S_2 — их единичные сферы; через E_1^* и E_2^* — сопряженные пространства (линейных функционалов) и через S_1^*, S_2^* — единичные сферы этих пространств. Через U обозначим линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, а через U^* — сопряженный ему оператор (действующий из E_2^* в E_1^*); при этом $\|U^*\| = \|U\|$ ([1]).

Если оператор U отображает E_1 на E_2 и при этом

$$\|Ux\| = \|x\| \qquad (x \in E_1),$$

то этот оператор называется изометрическим. Обратный оператор U^{-1} для изометрического U также изометрический; из равенства $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$ вытекает

$$\|(U^*)^{-1}\| = \|(U^{-1})^*\| = \|U^{-1}\| = 1.$$

Отсюда легко получается следующая

Лемма 1. *Если линейный оператор U отображает E_1 на E_2 изометрически, то сопряженный ему оператор U^* отображает E_2^* на E_1^* изометрически.*

Регулярной гранью S_1^* мы назовем совокупность всех точек $f \in S_1^*$, удовлетворяющих уравнение $f(x) = 1$, где $x \in E_1$ и $\|x\| = 1$; эту грань мы обозначим P'_x. Регулярную грань сферы S_2^*, отвечающую элементу $y \in E_2$, мы будем обозначать P''_y. Очевидно, что регулярная грань ограничена, выпукла и замкнута в слабой топологии (Тихонова) сопряженного пространства.

Лемма 2. *Если U отображает E_1 изометрически на E_2, то U^* отображает регулярную грань P_x на регулярную грань P_{ux}:*

$$U^* P''_{ux} = P'_x.$$

Эта лемма также легко проверяется.

Заметим, что поскольку оператор U имеет обратный оператор, U^* отображает E_2^* на E_1^* гомеоморфно в слабой топологии.

Отсюда и из лемм 1 и 2 вытекает на основании А

Теорема 1. *Если линейный оператор U отображает E_1 на E_2 изометрически, то оператор U осуществляет гомеоморфное соответствие между множествами $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ экстремальных точек S_1^* и S_2^*, а также между множествами экстремальных точек $\mathfrak{E}'_x$ и $\mathfrak{E}''_x$ соответственных регулярных граней P'_x и P''_{ux} сфер S_1^* и S_2^*; при этом гомеоморфизм понимается в смысле слабой топологии E_1^*, E_2^*.*

Следствие. *Изометрический линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, является экстремальным, т. е. равенство*

$$U = \frac{A+B}{2},$$

где A и B — линейные операторы с нормой не большей единицы, возможно лишь при $A=B$.

Доказательство. Пусть f_0 — экстремальная точка S_2^*. Тогда точка $\varphi_0 = U^* f_0$ экстремальна в S_1^* и выполняется

$$\varphi_0 = U^* f_0 = \frac{A^* f_0 + B^* f_0}{2}.$$

Так как $A^* f_0 \in S_1^*$ и $B^* f_0 \in S_1^*$, то $A^* f_0 = B^* f_0 = U^* f_0$.

Таким образом

$$f(Ax) = f(Bx) = f(Ux) \quad (x \in E_1)$$

для всех экстремальных точек S_2^*.

Так как S_2^* имеет „достаточно много" экстремальных точек ([2]), то

$$\sup_{f \in S_2^*} f(Ax - Ux) = \sup_{f \in \mathfrak{E}_2} f(Ax - Ux) = 0,$$

где $\mathfrak{E}_2$ — множество экстремальных точек S_2^*.

Следовательно, $A = B = U$.

Примечание. Указанное следствие, очевидно, содержит в себе следующую теорему И. М. Гельфанда: если e является единицей нормированного кольца ([3]), то равенство

$$e = \frac{x+y}{2},$$

где x и y — элементы единичной сферы кольца, влечет $x = y = e$.

Опираясь на теорему 1, мы докажем следующую теорему.

Теорема 2 *. *Пусть Q — бикомпакт и C_Q — совокупность всех*

---

* М. Г. Крейн, ознакомившись с теоремой 1, обратил внимание автора на то обстоятельство, что теоремы „о ротациях" ([1]) следует получать с помощью этой теоремы.

вещественных непрерывных функций на нем. Общий вид линейного изометрического оператора U в C_Q дается равенствами:

$$y = Ux, \quad y(q) = \eta(q)\, x[\varphi(q)], \quad |\eta(q)| \equiv 1 \quad (q \in Q,\ x \in C_Q),$$

где $\eta(q)$ — непрерывная вещественная функция, $\varphi(q)$ — гомеоморфизм на бикомпакте Q.

Доказательство. Достаточность условий теоремы для изометрического оператора U в C_Q является очевидной.

Обозначим через P_e ту регулярную грань единичной сферы пространства C_Q^*, сопряженного к пространству C_Q, которая отвечает элементу $e \in C_Q$, тождественно равному единице на Q.

Докажем, что P_e совпадает с совокупностью всех средних значений (в смысле А. Маркова (4)).

Если $f \in P_e$, то $\|f\| = 1$ и $f(e) = 1$. Если $x \in C_Q$ $x(q) \geqslant 0$ при $q \in Q$, то

$$\| \|x\| e - x \| \leqslant \|x\|,$$

и потому имеем $\|x\| - f(x) = f(\|x\| e - x) \leqslant \|x\|$. Следовательно, $(x) \geqslant 0$.

Таким образом, множество P_e состоит из средних значений. Пусть теперь $f(x)$ — среднее значение. Тогда $f(e) = 1$, и неравенство $\|x\| \pm x(q) \geqslant 0$, $q \in Q$, которое верно при всех $x \in C_Q$, влечет

$$\|x\| \pm f(x) \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что $\|f\| = f(e) = 1$; значит, $f \in P_e$.

Каждый элемент $q \in Q$ порождает элемент $f_q \in P_e$, и совокупности Q отвечает совокупность $\overline{Q} \subset P_e$.

Множество $\overline{Q}$ является в слабой топологии C_Q^* хаусдорфовым пространством и непрерывным образом бикомпакта Q; по известной теореме, $\overline{Q}$ бикомпактно в слабой топологии.

$\overline{Q}$ оказывается замкнутым (в слабой топологии) подмножеством P_e, заданием на котором определены все элементы C_Q, при этом неотрицательность элемента $x \in C_Q$ на $\overline{Q}$ влечет его неотрицательность на P_e.

По теореме автора (5,6), $\overline{Q}$ содержит все экстремальные точки P_e. Докажем теперь, что, наоборот, при каждом элементе $q_0 \in Q$ f_{q_0} есть экстремальная точка P_e.

Среднему значению f_{q_0} отвечает единственным образом вполне аддитивная функция множеств $\sigma(I)$, определенная на борелевском теле бикомпакта Q („внешняя плотность» А. Маркова (4)).

Так как f_{q_0} определено равенством $f_{q_0}(x) = x(q_0)$, $x \in C_Q$, то в силу указанной единственности мы заключаем, что

$$\sigma(\{q_0\}) = 1,$$

где $\{q_0\}$ — множество, состоящее из единственной точки q_0.

Если $f_{q_0} = \dfrac{\varphi + \psi}{2}$, φ, $\psi \in P_e$ и $\sigma_\varphi(I)$, $\sigma_\psi(I)$ суть вполне аддитивные функции множества, единственным образом отвечающие φ и ψ, то из равенства

$$\sigma(I) = \frac{\sigma_\varphi(I) + \sigma_\psi(I)}{2}$$

(верного для борелевских множеств Q) вытекает $\sigma_\varphi(\{q_0\}) = 1$. Поэтому $\sigma_\varphi = \sigma_\psi$ и $\varphi = \psi = f_{q_0}$.

Согласно теореме 1, оператор U^* нашей теоремы осуществляет гомеоморфное соответствие между множествами N_e и N_{ue} экстремальных точек соответственных регулярных граней P_e и P_{ue}.

Мы ранее доказали, что $N_e = \overline{Q}$. Значит, $U^* \overline{Q} = N_{ue}$.

Исходя из общего вида линейного функционала в C_Q, мы заметим, что единичная сфера в C_Q^* совпадает с выпуклой оболочкой множеств P_e и $-P_e$. Поэтому каждая экстремальная точка единичной сферы C_Q^* лежит либо в $\overline{Q}$ либо в $-\overline{Q}$.

Таким образом, множество N_{ue} распадается на два множества, которые лежат в $\overline{Q}$ и $-\overline{Q}$.

Равенство $U^* \overline{Q} = N_{ue}$ запишется теперь так:

$$U^* f_q = \eta(q) f_{\varphi(q)},$$

где $|\eta(q)| = 1$ и $\varphi(q) \in Q$.

Из того, что U^{-1} также является изометрическим оператором, нетрудно заключить, что $\varphi(q)$ является взаимно-однозначным отображением Q на себя.

Равенство $U^* f_q(x) = \eta(q) f_{\varphi(q)}(x)$ $(x \in C_Q)$ можно переписать в такой форме:

$$y = Ux, \quad y(q) = \eta(q)\, x[\varphi(q)] \quad (q \in Q,\ x \in C_Q).$$

Остается доказать, что $\eta(q)$ и $\varphi(q)$ удовлетворяют требованиям нашей теоремы.

Полагая $x = e$, мы получаем

$$Ue(q) \equiv \eta(q),$$

и, значит, $\eta(q) \in C_Q$. Отсюда вытекает, что $\eta(q) U^* f_q$ есть операция непрерывная в слабой топологии на $\overline{Q}$. Следовательно, равенство

$$f_{\varphi(q)} = \eta(q) U^* f_q$$

устанавливает гомеоморфизм в $\overline{Q}$ (в слабой топологии), и этому гомеоморфизму отвечает гомеоморфизм $\varphi(q)$ в Q.

Этим доказательство теоремы закончено.

Одесский электротехнический институт
инженеров связи

Поступило
6 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [2] M. Krein and D. Milman, Studia Math., 9, 138 (1940). [3] И. Гельфанд, Матем. сб., 9 (51), 3, 41, 51 (1941). [4] А. Марков, Матем. сб., 4 (46): 1, 157, 165 (1938). [5] Д. Мильман, ДАН, 57, № 2 (1947). [6] Д. Мильман, ДАН, 59, № 6 (1948).