Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

Л. В. КАНТОРОВИЧ

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 I 1948)

Здесь мы рассматриваем применение процесса Ньютона — одного из классических методов решения алгебраических уравнений — к нелинейным функциональным уравнениям. Устанавливаемая ниже теорема о сходимости этого метода представляет одновременно некоторую теорему существования и единственности для функциональных уравнений с удобно проверяемыми условиями. Кроме метода Ньютона рассматриваются и некоторые его модификации.

В дальнейшем X — полное линейное нормированное пространство типа (B) [1]; $P(x)$ — оператор, преобразующий X в пространство Y того же типа. Рассматривается уравнение

$$P(x)=0, \tag{1}$$

где P предполагается дважды дифференцируемым в смысле Fréchet [2].

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Для $P'(x_0)$ — оператора из X в Y — имеется обратный $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$, и при этом*

$$\|\Gamma_0\|\leqslant B_0. \tag{2}$$

2) *Элемент x_0 приближенно удовлетворяет уравнению* (1)

$$\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leqslant \eta_0. \tag{3}$$

3)
$$\|P''(x)\|\leqslant K \tag{4}$$

в используемой нами области, определяемой неравенством (6).

4)
$$B_0\eta_0 K=h_0\leqslant {}^1/_2. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) *имеет решение x^*, которое может быть найдено алгорифмом Ньютона, и при этом*

$$\|x_0-x^*\|\leqslant N(h_0)\eta_0=\frac{1-\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0, \tag{6}$$

а быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^{n-1}}\eta_0. \tag{7}$$

При этом решение единственно в области

$$\|x-x_0\|<L(h_0)\eta_0=\frac{1+\sqrt{1-2h_0}}{h_0}\eta_0 \tag{8}$$

(если $h_0={}^1/_2$, то знак $<$ в (8) *должен быть заменен на $\leqslant$) при условии, что неравенство* (4) *выполнено в этой области.*

Доказательство. Введем обозначение

$$F_0(x)=x-\Gamma_0 P(x). \tag{9}$$

Согласно методу Ньютона последовательные приближения связаны типической формулой

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0) = F_0(x_0). \tag{10}$$

Покажем, что, переходя от x_0 к x_1, мы сохраним выполнение условий 1) — 4). Имеем

$$\| x_1 - x_0 \| = \| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0. \tag{11}$$

Далее воспользуемся следующим аналогом формулы Тэйлора

$$\| U \| = \| F(x) - F(x_0) - \ldots - \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x - x_0) \ldots (x - x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(k+1)!} \sup \| F^{(k+1)}(\bar{x}) \| \, \| x - x_0 \|^{k+1}, \tag{12}$$

$$\bar{x} = t x_0 + (1 - t) x, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Для доказательства (12) подберем такой функционал T, что $\| T \| = 1$, $T(U) | = \| U \|$, и построим функцию $f(t) = TF(x_0 + t(x - x_0))$. Тогда

$$\| U \| = | T(U) | = | f(1) - f(0) - \ldots - \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) | = | \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\theta) | =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} | TF^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \ldots (x - x_0) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(k+1)!} \sup \| F^{(k+1)}(\bar{x}) \| \, \| x - x_0 \|^{(k+1)}.$$

В частности отсюда, так как $F'_0(x_0) = I - \Gamma_0 P'(x_0) = 0$, найдем

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| = \| F_0(x_1) - F_0(x_0) - F'_0(x_0)(x_1 - x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant {}^1\!/_2 \sup \| F''_0(\bar{x}) \| \, \| x_1 - x_0 \|^2 \leqslant {}^1\!/_2 B_0 K \eta_0^2 = {}^1\!/_2 h_0 \eta_0. \tag{13}$$

Далее имеем

$$\Gamma_1 = [P'(x_1)]^{-1} = [I + \Gamma_0 (P'(x_1) - P'(x_0))]^{-1} \Gamma_0 = H \Gamma_0. \tag{14}$$

При этом, так как $\| \Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)] \| \leqslant K \eta_0 B_0 = h_0 < 1$, то оператор $H = [I + \Gamma_0 (P'(x_1) - P'(x_0))]^{-1}$ существует и имеем ((1), стр. 158)

$$\| H \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}. \tag{15}$$

Следовательно, существует и Γ_1 и, по (13) и (15),

$$\| \Gamma_1 \| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1, \tag{16}$$

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| = \| H \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0} \frac{1}{2} h_0 \eta_0 = \eta_1. \tag{17}$$

Наконец, имеем

$$h_1 = B_1 K \eta_1 = \frac{B_0}{1 - h_0} K \eta_0 \frac{1}{2} \frac{h_0}{1 - h_0} = \frac{1}{2} \frac{h_0^2}{(1 - h_0)^2} \leqslant 2 h_0^2 \leqslant \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Отсюда видим, что для x_1 соблюдены условия, аналогичные (2), (3), (4) и (5), что позволяет продолжить определение элементов x_n и чисел h_n, η_n, B_n. При этом

$$h_2 \leqslant 2h_1^2 \leqslant 8h_0^4, \qquad h_n \leqslant {}^1/_2 (2h_0)^{2^n}, \tag{19}$$

$$\eta_n = \frac{1}{2} \, \frac{h_{n-1}}{1-h_{n-1}} \, \eta_{n-1} \leqslant h_{n-1}\eta_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant h_{n-1} h_{n-2} \ldots h_0 \eta_0 \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-n} (2h_0)^{2^n-1} \eta_0. \tag{20}$$

Далее, так как $\eta_n N(h_n) - \eta_{n+1} N(h_{n+1}) = \eta_n$, находим

$$\| x_n - x_{n+p} \| \leqslant \eta_n + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant N(h_n)\eta_n \leqslant$$
$$\leqslant 2\eta_n \leqslant 2^{1-n} (2h_0)^{2^n-1} \eta_0.$$

Этим доказано существование $\lim x_n = x^*$ и справедливость (6) и (7).

Для установления единственности предположим, что имеется значение $\tilde{x}$, удовлетворяющее условию

$$\| \tilde{x} - x_0 \| \leqslant \theta L(h_0) \eta_0 \qquad (0 < \theta < 1)$$

и уравнению $P(\tilde{x}) = 0$ или $F_0(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Имеем, как выше,

$$\| \tilde{x} - x_1 \| = \| F_0(\tilde{x}) - F_0(x_0) \| \leqslant {}^1/_2 B_0 K \| \tilde{x} - x \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant {}^1/_2 B_0 K \theta^2 L^2(h_0) \eta_0 = \theta^2 L(h_1) \eta_1.$$

Т. е. для $\tilde{x}$ и x_1 соблюдены условия, аналогичные предыдущим. Поэтому, продолжая оценки, найдем

$$\| \tilde{x} - x_n \| \leqslant \theta^{2^n} L(h_n) \eta_n \leqslant \theta^{2^n} \frac{2}{B_n K}, \tag{21}$$

откуда видим, что $\| \tilde{x} - x_n \| \to 0$ и, следовательно, $\tilde{x} = \lim x_n = x^*$. В случае $h_0 = {}^1/_2$ тот факт, что $\| x_n - \tilde{x} \| \to 0$, верен и для $\theta = 1$ и непосредственно следует из того, что $B_n = 2^n B_0 \to \infty$.

Замечание 1. Условие (3) могло быть заменено более простым $\| P(x_0) \| \leqslant \bar{\eta}_0$. Тогда теорема применима, если принять $\eta_0 = B_0 \bar{\eta}_0$.

Замечание 2. Оценки (5), (6) и (8) не могут быть уточнены (пример — уравнение ${}^1/_2 x^2 - x + h_0 = 0$, $x_0 = 0$). Для уравнения с одним вещественным или комплексным неизвестным эти результаты частично получены A. Ostrowski ([3], [4]) и при иных условиях еще A. Cauchy ([5]).

Замечание 3. При наличии полной непрерывности P существование решения могло бы быть установлено на основании теоремы Шаудера, так как уравнению можно придать вид $x = F_0(x)$, а оператор $F_0(x)$ переводит сферу (6) в себя. Принцип Cacciopolli — Банаха дает результат с более грубыми оценками.

Замечание 4. Наряду с процессом Ньютона могут применяться и модифицированные процессы. Удобно определять приближения так: $x_{n+1} = x_n - \Gamma_0 P(x_n)$ ([3]). Здесь сходимость может быть установлена при условии $h_0 \leqslant \sqrt{2} - 1$. Сходимость будет при $h_0 \leqslant {}^1/_2$, если приближения определяются по Граве ([6]): $x_{n+1} = x_n - Q\,[P'(xn)]^{-1} P(x_n)$ $(0 < Q < 1)$.

Замечание 5. Отмечаем некоторый принципиальный интерес доказанной теоремы. Из нее следует возможность установить существование решения путем нахождения достаточно хорошего приближения к нему. Указанный путь применим ко всякому не особенному решению (для которого $\| [P'(x^*)]^{-1} \| < +\infty$), так как тогда при x_0 близком к x^* условие (15) будет наверное соблюдено.

1. Системы алгебраических и трансцедентных уравнений. Беря в качестве X m-мерное пространство с нормой $\|x\| = \sup(|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|)$, приходим к теореме:

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений*

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{22}$$

1) $|f_i(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0)| \leqslant \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$;

2) *матрица* $\|(\partial f_i / \partial \xi_k)_0\|_{i,k=1,\ldots,m}$ *имеет определитель* Δ, *отличный от нуля; если* $A_{i,k}$ *миноры его, то положим*

$$\max \frac{1}{|\Delta|} \sum_k |A_{i,k}| = B;$$

3) $|\partial^2 f_i / \partial \xi_i \partial \xi_j| \leqslant L$ *в интересующей нас области.*

Тогда, если

4) $h = B^2 n^2 \eta L \leqslant 1/2$, *то решение системы* (22) *существует и может быть получено методом Ньютона.*

Беря иную нормировку основного пространства и используя замечание 3, можно получить и другие аналогичные теоремы.

Подобного характера теоремы ранее приводились в работах [7—10] (в связи с теорией общих функциональных уравнений), однако при более жестких и менее удобных условиях.

2. Интегральные уравнения. Рассмотрим уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt. \tag{23}$$

Пусть X — пространство M ограниченных функций. Тогда имеем

Теорема 3. *При выполнении условий:*

1°. $\left| x_0(s) - \int_0^1 K(s, t, x_0(t))\, dt \right| \leqslant \eta$;

2°. *Ядро* $K'_x(s, t, x_0(t)) = K(s, t)$ *имеет резольвенту* $\Gamma(s, t)$, *причем* $\int_0^1 |\Gamma(s, t)|\, dt \leqslant B, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1$;

3°. $|K''_{x^2}(s, t, u)| \leqslant K$;

4°. $(B + 1)^2 \eta K \leqslant 1/2$

уравнение (22) *имеет решение.*

Подобная теорема, но с числом $1/10$ вместо $1/2$ в условии 4°, была дана Д. М. Загадским [11].

Поступило
6 I 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [2] M. Fréchet, Ann. Ec. Norm., 293 (1925) [3] А. Островский, Сб. работ памяти Граве, М., 1940, стр. 213. [3] А. Островский, Сб. работ памяти Граве, М., 1940, стр. 213, [4] А. Островский, Матем. сб., 2, 1073 (1937). [5] A. Cauchy, Oeuvres compl. (II), 4, p. 273. [6] Д. Граве, Журн. Матем. ин-та АН УССР, 2, 3 (1936). [7] F. A. Willers, Methoden der prakt. Analysis, Berlin, 1928. [8] A. Ostrowski, Comment. Math. Helv., 9, 79 (1937). [9] Н. П. Стенин, Сб. работ Конформное отображение, М.—Л., 1937. [10] Л. В. Канторович, Уч. зап. ЛГУ, № 37, 17 (1937). [11] Д. М. Загадский, ДАН, 59, № 6 (1948).