Доклады Академии Наук СССР
1948, Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

А. П. ДИЦМАН

О ТЕОРЕМЕ СИЛОВА

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 25 XII 1947)

Теорема Силова, играющая важную роль в теории конечных групп, в последнее время была распространена на бесконечные дискретные [1, 2] и на топологические [3, 4] группы. Эти результаты устанавливают, однако, лишь достаточные условия существования теоремы Силова.

В настоящей работе указываются необходимые и достаточные условия осуществимости теорем, аналогичных и отчасти обобщающих теорему Силова, при этом приходится пользоваться некоторыми результатами, полученными ранее [5].

Пусть $A=\{\alpha\}$, $B=\{\beta\}$, $\Gamma=\{\gamma\}$ — некоторые множества индексов и $H_A=\{H_\alpha\}$, $H_B=\{H_\beta\}$, $H_\Gamma=\{H_\gamma\}$ — множества подгрупп группы G. Элемент g группы G называется $|p; H_A|$-элементом, если для каждого $\alpha\in A$ можно указать такое целое число $\delta=\delta(\alpha)$, что $g^{p^\delta}\in H_\alpha$. Подгруппа P группы G называется $|p; H_A|$-подгруппой, если каждый ее элемент есть $|p; H_A|$-элемент группы G. Максимальной $|p; H_A|$-подгруппой группы G называется $|p; H_A|$-подгруппа, не являющаяся истинной подгруппой никакой $|p; H_A|$-подгруппы, не совпадающей с G.

Если множество подгрупп $H_A=\{H_\alpha\}$ группы G содержит вместе с каждой подгруппой H_α и все сопряженные с ней в группе G подгруппы, то H_A называется инвариантным множеством подгрупп G, а $|p; H_A|$-элемент и $|p; H_A|$-подгруппа будут в дальнейшем называться $|p; H_A;$ инв.$|$-элементом и, соответственно, $|p; H_A;$ инв.$|$-подгруппой группы G.

Если каждая подгруппа из $H_A=\{H_\alpha\}$ является нормальным делителем группы G, то H_A называется нормальным множеством подгрупп G, а $|p; H_A|$-элемент и, соответственно, $|p; H_A|$-подгруппа группы G называются $|p; H_A;$ норм.$|$-элементом и $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппой группы G.

Пользуясь установленными ранее результатами [5], получаем необходимые и достаточные условия сопряженности всех максимальных $|p; H_A;$ норм.$|$-подгрупп группы.

Теорема 1. *Пусть $\{P_\beta\}$ — класс сопряженных максимальных $|p; H_A;$ норм.$|$-подгрупп группы G (A и B — некоторые множества индексов, $\beta\in B$). Все максимальные $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппы G сопряжены тогда и только тогда, если для каждой максимальной $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппы Π группы G можно найти среди подгрупп $\{P_\beta\}$ такую подгруппу P_π, $\pi\in B$, что класс подгрупп, сопряженных с P_π в группе $R=\{P_\pi, \Pi\}$, порождаемой P_π и Π, представляет конечное множество подгрупп.*

При некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на группу G, можно указать необходимые и достаточные условия сопряженности всех максимальных $|p; H_A;$ инв.$|$-подгрупп группы G.

Теорема 2. *Пусть $\{P_\beta\}$, $\beta \in B$, есть класс сопряженных максимальных $|p; H_A;$ инв.$|$-подгрупп группы G и пусть каждый элемент любой подгруппы P_β из $\{P_\beta\}$ вместе с каждым элементом любой подгруппы H_α из $H_A = \{H_\alpha\}$ порождают $|p; H_\alpha|$-подгруппу G. Все максимальные $|p; H_A;$ инв.$|$-подгруппы G сопряжены в группе G тогда и только тогда, если для каждой максимальной $|p; H_A;$ инв.$|$-подгруппы Π группы G можно указать среди подгрупп $\{P_\beta\}$ такую подгруппу P_π, $\pi \in B$, что класс подгрупп, сопряженных с P_π в группе $R = \{P_\pi, \Pi\}$, порождаемой подгруппами P_π и Π, представляет конечное множество подгрупп.*

В частности, имеет место

Теорема 3. *Пусть $\{P_\beta\}$, $\beta \in B$, класс сопряженных максимальных $|p; H_A;$ инв.$|$-подгрупп G и пусть множество всех элементов подгрупп $\{P_\beta\}$ содержится в пересечении всех нормализаторов подгрупп $\{H_\alpha\} = H_A$ группы G. Все максимальные $|p; H_A;$ инв.$|$-подгруппы группы G сопряжены в G тогда и только тогда, когда для каждой максимальной $|p; H_A;$ инв.$|$-подгруппы Π группы G можно указать среди подгрупп $\{P_\beta\}$ такую подгруппу P_π, $\pi \in B$, что класс подгрупп, сопряженных с P_π в группе $R = \{P_\pi, \Pi\}$, порождаемой подгруппами P_π и Π, представляет конечное множество подгрупп.*

Если A — конечное множество индексов и $H_A = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ — конечное множество нормальных делителей группы G, то оказывается справедливой

Теорема 4. *Пусть T и P_τ — максимальные $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппы группы G, где $H_A = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ и $\{P_\beta\}$ — класс подгрупп, сопряженных с P_τ в G, и $\beta \in B$. Пусть $R = \{T, P_\tau\}$ — подгруппа, порождаемая T и P_τ, а $\{P_\gamma\}$ — класс подгрупп, сопряженных с P_τ в R, где $\gamma \in \Gamma \subset B$ и $\overline{H}_\alpha = H_\alpha \cap R$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, k$.*

Все максимальные $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппы G сопряжены тогда и только тогда, если для каждой максимальной $|p; H_A;$ норм.$|$-подгруппы T группы G можно указать среди подгрупп $\{P_\beta\}$ такую одгруппу P_τ, что множество всех произведений $\overline{H}_\alpha P_\gamma$, где $\alpha = 1, 2, \ldots, k$ и $\gamma \in \Gamma$, представляет конечное множество различных подгрупп группы G.

Сопряженность всех силовских подгрупп в случаях, рассмотренных ранее, непосредственно следует из указанных выше результатов.

Поступило
25 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Дицман, А. Г. Курош, А. И. Узков, Мат. сб. (нов. сер.), 3, 179 (1938). [2] R. Baer, Duke Math. J., 6, 598 (1940). [3] D. van-Dantzig, Comp. Math., 3, 408 (1936). [4] А. Г. Курош, Изв. АН СССР, сер. мат., 9, 65 (1945). [5] A. P. Dietzmann, Ann. Math., 48, 137 (1947).