Доклады Академии Наук СССР
1948, Том LIX, № 7

МАТЕМАТИКА

Я. П. БЛАНК

# КЛИФФОРДОВО-СОПРЯЖЕННЫЕ СЕТИ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 I 1948)*

1°. В теории поверхностей эллиптического пространства, наряду с сопряженностью в смысле Дюпена, полезно ввести в рассмотрение два проективных соответствия в пучке касательных.

Определение. Касательную $t_2$ назовем правой (левой) клиффордово-сопряженной с $t_1$, если она касается линии соприкосновения поверхности с описанной около нее линейчатой, составленной из правых (левых) клиффордовых параллелей к $t_1$.

Эти соответствия не инволюционны, но если $t_2$— правая к.-сопряженная для $t_1$, то $t_1$— левая к.-сопряженная для $t_2$. Аналитически соответствия записываются так:

$$b_{ik}du^i\delta u^k = \pm\sqrt{g}(du^1\delta u^2 - du^2\delta u^1), \qquad (1)$$

где $g_{ik}$, $b_{ik}$ — первый и второй тензоры поверхности эллиптического пространства, а радиус кривизны пространства принят равным единице, или

$$b_{ik}p^i q^k = \pm\sin\omega, \qquad (1')$$

где $p, q$ — орты к.-сопряженных касательных, а $\omega$ — заключенный между ними угол.

Двойными элементами соответствия служат асимптотические касательные.

Поверхности нулевой кривизны характеризуются тем, что для них соответствия вырождаются.

Если $t_i$ $(i=1, 2)$ — к.-сопряженные касательные, а $t_i'$ сопряжены с $t_i$ в смысле Дюпена, то $t_i'$ к.-сопряжены между собой.

Теорема. *Гауссова кривизна поверхности эллиптического пространства равна ангармоническому отношению касательных* $t_1, t_2, t_1', t_2'$.

Поверхности сдвига эллиптического пространства характеризуются наличием чебышевской к.-сопряженной сети.

2°. Рассмотрим изгибание поверхностей эллиптического пространства с сохранением к.-сопряженной сети.

Если положить $b_{ik}=\sqrt{g}\,\Delta_{ik}$, то условие, чтобы координатная сеть была к.-сопряженной, записывается так: $\Delta_{12}^2=1$. При этом гауссова кривизна $K=\Delta_{11}\Delta_{22}$.

Положив $\Delta_{11}=t\sqrt{K}$, $\Delta_{22}=t^{-1}\sqrt{K}$ и подставив в формулы Кодацци ([1]), получим:

$$\frac{\partial \lg t}{du}=at^2+bt+c, \quad -\frac{\partial \lg t}{dv}=a_1t^{-2}+b_1t^{-1}+c_1. \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} a=\Gamma_{22}^1, \quad b=-2\Gamma_{12}^1 K^{-1/2}, \quad c=\Gamma_{11}^1+{}^1/_2(\lg K)_u, \\ a_1=\Gamma_{11}^2, \quad b_1=-2\Gamma_{12}^2, K^{-1/2} \quad c_1=\Gamma_{22}^2+{}^1/_2(\lg K)_v. \end{gathered} \tag{3}$$

Необходимое условие совместности:

$$\begin{gathered} t^2\left(\frac{\partial a}{\partial v}-2ac_1\right)+t\left(\frac{\partial b}{\partial v}-bc_1-3ab_1\right)+\frac{\partial c}{\partial v}+\frac{\partial c_1}{\partial u}-4aa_1-2bb_1+ \\ +t^{-1}\left(\frac{\partial b_1}{\partial u}-b_1c-3a_1b\right)+t^{-2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u}-2a_1c\right)=0. \end{gathered} \tag{4}$$

Если сеть к.-сопряжена на пяти изометричных поверхностях, то она сохраняется при непрерывном изгибании.

3°. В случае поверхностей сдвига $b=b_1=0$, и уравнения (2), (3), (4) совпадают с аналогичными уравнениями для изгибания поверхностей переноса евклидова пространства (2).

Это приводит к заключению: каждой паре налагающихся поверхностей переноса евклидова пространства соответствует изометричная пара налагающихся поверхностей сдвига эллиптического пространства.

Для поверхностей сдвига эллиптического пространства, допускающих непрерывное изгибание, уравнение (4) выполняется тождественно:

$$\begin{gathered} \operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{\omega_u}{\omega_{uv}}, \quad \operatorname{ctg}\omega\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{\omega_v}{\omega_{uv}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\lg\frac{\omega_u\,\omega_v}{\sin^2\omega}=8\,\frac{\omega_u\,\omega_v}{\sin^2\omega}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\omega$ — угол между кривыми сдвига.

Решение системы (5) есть:

$$\cos\omega=UV, \tag{6}$$

где $U$ — произвольная функция $u$, $V$ — функция $v$.

С другой стороны, воспользовавшись представлением поверхности сдвига посредством кватернионов: $x=XY$, где

$$\begin{gathered} X=\sum u_ie_i, \quad Y=\sum v_ie_i \qquad (i=0,1,2,3), \\ \sum u_i^2=\sum v_i^2=\sum\left(\frac{du_i}{du}\right)^2=\sum\left(\frac{dv_i}{dv}\right)^2=1, \end{gathered} \tag{7}$$

можно непосредственно вычислить $\cos\omega$:

$$\begin{gathered} \cos\omega=(u_{01}-u_{23})(v_{01}+v_{23})+(u_{02}-u_{31})(v_{02}+v_{31})+ \\ +(u_{03}-u_{12})(v_{03}+v_{12}), \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} u_i & u_k \\ \dfrac{du_i}{du} & \dfrac{du_k}{du} \end{vmatrix}, \qquad v_{ik} = \begin{vmatrix} v_i & v_k \\ \dfrac{dv_i}{dv} & \dfrac{dv_k}{dv} \end{vmatrix}.$$

Из сопоставления (6) и (8) следует:

$$\begin{gathered} A_1(u_{01} - u_{23}) + A_2(u_{02} - u_{31}) + A_3(u_{03} - u_{12}) = 0, \\ B_1(v_{01} + v_{23}) + B_2(v_{02} + v_{31}) + B_3(v_{03} + v_{12}) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где $A_i, B_i$ — постоянные, связанные условием:

$$\sum A_i B_i = 0. \tag{10}$$

Линейные комплексы (9), (10) можно привести в виду

$$u_{02} - u_{31} = 0, \qquad v_{01} + v_{23} = 0$$

и кватернионы $X, Y$, если отказаться от нормирования согласно (7), допускают представление:

$$\begin{gathered} u_0 : u_1 : u_2 : u_3 = 1 : U' : 2U - uU' : -u, \\ v_0 : v_1 : v_2 : v_3 = 1 : vV' - 2V : v : -V'. \end{gathered}$$

4°. Сеть кривых сдвига может состоять из минимальных линий. В этом случае вместо (7) имеем:

$$\begin{gathered} x = XY, \quad X = \sum u_i e_i, \quad Y = \sum v_i e_i, \\ \sum u_i^2 = \sum v_i^2 = 1, \quad \sum \left(\frac{du_i}{du}\right)^2 = \sum \left(\frac{dv_i}{dv}\right)^2 = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Метрический тензор поверхности имеет компоненты

$$g_{11} = g_{22} = 0,$$

$$g_{12} = (u_{01} - u_{23})(v_{01} + v_{23}) + (u_{02} - u_{31})(v_{02} + v_{21}) + (u_{03} - v_{12})(v_{03} + v_{12})$$

причем

$$\begin{gathered} (u_{01} - u_{23})^2 + (u_{02} - u_{31})^2 + (u_{03} - u_{12})^2 = 0, \\ (v_{01} + v_{23})^2 + (v_{02} + v_{31})^2 + (v_{03} + v_{12})^2 = 0. \end{gathered}$$

Если исключить случай, когда минимальные линии прямые, можно положить:

$$\begin{gathered} u_{01} - u_{23} = \frac{1 - u^2}{2} U, \quad v_{01} + v_{23} = \frac{1 - v^2}{2} V, \\ u_{02} - u_{31} = i\,\frac{1 + u^2}{2} U, \quad v_{02} + v_{31} = -i\,\frac{1 + v^2}{2} V, \\ u_{03} - u_{12} = uU, \quad v_{03} + v_{12} = vV, \\ ds^2 = (1 + uv)^2\, UV\, du\, dv. \end{gathered}$$

Эти поверхности изометричны минимальным поверхностям евклидова пространства.

Компоненты второго тензора

$$b_{11} = -U, \qquad b_{22} = -V,$$

$$b_{12} = ig_{12} = \frac{i}{2}(1+uv)^2 UV.$$

Поверхности характеризуются тем, что у них средняя кривизна постоянна и равна $i$. Условие (4) выполняется тождественно — поверхности допускают непрерывное изгибание с сохранением к.-сопряженной сети минимальных линий.

Институт математики и механики
Харьковского государственного
университета

Поступило
9 I 1948

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 2, 1924, p. 2. [2] С. П. Фиников, Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, 1937.