Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. ЗВОЛИНСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИМПУЛЬСА В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОКРЫТОМ СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 23 XII 1947)

1. Рассматривается твердое упругое полупространство $y>0$, покрытое слоем упругой жидкости глубиной H. Скорость распространения продольных волн в твердой среде a_2, поперечных b_2, плотность среды ρ_2. Плотность жидкости ρ_1, скорость продольных волн в ней a_1. Предполагаем, что $a_2>b_2>a_1$. Координатная плоскость Oxz совпадает с плоскостью контакта обеих сред. Ось Oy направлена вертикально вниз. Пусть в момент $t=0$ действует мгновенный цилиндрический импульс типа центра расширения, сосредоточенный вдоль прямой $x=0$, $y=y_0$. На поверхности жидкости давление постоянно, на границе контакта соблюдается равенство нормальных напряжений и скоростей и обращается в нуль касательное напряжение. Требуется найти состояние системы для любого момента времени. Задача сводится к двумерной (относительно координат). Требуется найти потенциал $\varphi_1(x, y, t)$ скоростей для жидкости, потенциалы — продольный $\varphi_2(x, y, t)$ и поперечный $\psi_2(x, y, t)$ для твердой среды как решения волновых уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=0 \quad (-H<y<0),\\ &\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}-\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}=0, \quad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\frac{1}{b_2^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}=0 \quad (y>0). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Граничные условия: на свободной поверхности ($y=-H$)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0$$

и на поверхности контакта ($y=0$)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y\,\partial t}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial t},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=(a_2^2-2b_2^2)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}-2b_2^2\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\,\partial y},$$

$$2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}=0.$$

Характер заданного в начальный момент импульса требует, чтобы при достаточно малых значениях t было:

$$\varphi_1(x, y, t) \equiv 0, \quad \varphi_2(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 t^2 - x^2 - (y - y_0)^2}}, \quad \psi_2(x, y, t) \equiv 0.$$

Эти условия играют роль начальных.

Характер начального импульса поведет к тому, что решения будут неограниченными на некоторых поверхностях, и потому нельзя требовать, чтобы решения эти были правильными ([1]). Будем требовать, чтобы функции, решающие поставленную задачу, являлись производными по времени от правильных решений соответствующих волновых уравнений.

2. Задача решается с помощью построения вспомогательного семейства плоских волн, зависящего от параметра θ. Построение этого семейства волн осуществляется на основании результатов автора ([2]). Это семейство решений уравнений (1), удовлетворяющих также и граничным условиям, задается формулами:

$$\varphi_1^*(\tau, y) = -\frac{2\varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{1 - 2b_2^2\theta^2}{r + R}\sum_{k=0}^{\infty}(-m)^k\left\{\frac{1}{(\tau + \varkappa_1 y - \varkappa_2 y_0 + kh)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(\tau - \varkappa_1 y - \varkappa_2 y_0 + (k+1)h)^2}\right\},$$

$$\varphi_2^*(\tau, y) = \frac{1}{\tau + \varkappa_2(y - y_0)} - \frac{R^* - r}{R + r}\frac{1}{\tau - \varkappa_2(y + y_0)} -$$

$$- \frac{4r(1 - 2b_2^2\theta^2)^2}{(r + R)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-m)^{k-1}}{\tau - \varkappa_2(y + y_0) + kh},$$

$$\psi_2^*(\tau, y) = \frac{4b_2^2\varkappa_2\theta(1 - 2b_2^2\theta^2)}{r + R}\left\{\frac{1}{\tau - \lambda_2 y - \varkappa_2 y_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{2r}{r + R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-m)^{k-1}}{\tau - \lambda_2 y - \varkappa_2 y_0 + kh}\right\}. \tag{2}$$

(обозначения здесь заимствованы из ([2])).

Интегрированием по параметру θ мы можем получить из функций этого семейства новые решения. Построим их следующим образом:

$$\varphi_1(x, y, t) = \frac{1}{\pi a_2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{(L)}\frac{1 - 2b_2^2\theta^2}{\varkappa_1(r + R)}\left\{\frac{(-m)^k}{(\tau + \varkappa_1 y - \varkappa_2 y_0 + kh)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-m)^k}{(\tau - \varkappa_1 y - \varkappa_2 y_0 + (k+1)h)^2}\right\} d\theta, \tag{3^1}$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a_2}\int_{(L)}\frac{d\theta}{[\tau + \varkappa_2(y - y_0)]\varkappa_2} - \frac{1}{2\pi a_2}\int_{(L)}\frac{R^* - r}{R + r}\frac{d\theta}{[\tau - \varkappa_2(y + y_0)]\varkappa_2} -$$

$$- \frac{2\rho_1}{\pi a_2 \rho_2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(L)}\frac{(1 - 2b_2^2\theta^2)^2}{\varkappa_1(r + R)^2}\frac{(-m)^{k-1}\,d\theta}{\tau - \varkappa_2(y + y_0) + kh}, \tag{3^2}$$

$$\psi_2(x, y, t) = \frac{2b_2^2}{\pi a_2} \int\limits_{(L)} \frac{\theta(1 - 2b_2^2\theta^2)}{r + R} \frac{d\theta}{\tau - \lambda_2 y - \varkappa_2 y_0} +$$

$$+ \frac{4\rho_1 b_2^2}{\pi\rho_2 a_2} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{(L)} \frac{\theta(1 - 2b_2^2\theta^2)\varkappa_2}{\varkappa_1 (r + R)^2} \frac{(-m)^{k-1}\, d\theta}{\tau - \lambda_2 y - \varkappa_2 y_0 + kh}. \qquad (3^3)$$

В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболев доказали [3], что уравнение $r + R = 0$ имеет два корня $\pm 1/c$, притом выполняются неравенства

$$\frac{1}{a_2} < \frac{1}{b_2} < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{c}.$$

За контур интегрирования L возьмем замкнутый контур, охватывающий отрезок $(-1/c, +1/c)$. Вне такого контура все подинтегральные функции в формулах (3) будут однозначными.

Исследование этих функций показывает, что

1) При достаточно малом t (например при $t < y_0/a_2$) все подинтегральные функции будут регулярными вне отрезка $\left(-\frac{1}{c}, +\frac{1}{c}\right)$, за исключением функции $\frac{1}{[\tau + \varkappa_2(y - y_0)]\varkappa_2}$, интегрирование которой дает

$$\frac{1}{2\pi a_2} \int\limits_{(L)} \frac{d\theta}{[\tau + \varkappa_2(y - y_0)]\varkappa_2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a_2^2 t^2 - x^2 - (y - y_0)^2}} & \text{при } a_2^2 t^2 > x^2 + (y - y_0)^2 \\ 0 & \text{при } a_2^2 t^2 < x^2 + (y - y_0)^2. \end{cases}$$

2) При фиксированных x, y, t и достаточно большом k подинтегральные функции имеют полюсы только на отрезке $\left(-\frac{1}{a_2}, +\frac{1}{a_2}\right)$, т. е. внутри контура L. При выборе контура L потребуем, чтобы он не заключал внутри себя комплексных полюсов, что всегда можно сделать при фиксированных x, y, t.

Преобразование контура интегрирования, именно превращение его в окружность бесконечно большого радиуса с добавлением вычетов в тех случаях, когда существуют комплексные полюсы, позволяет преобразовать формулы (3).

При этом члены сумм с достаточно большими индексами оказываются нулями. Ряды в этих формулах оказываются конечными суммами (при фиксированных x, y, t), и легко решается в положительном смысле вопрос об удовлетворении дифференциальных уравнений и граничных условий.

Вычисление вычетов приводит к следующему результату (с точностью до некоторых несущественных слагаемых), справедливому при $x > 0$ и $a_2^2 t^2 > x^2 + (y - y_0)^2$:

$$\varphi_1(x, y, t) = -\frac{2i}{a_2} \sum_{k=0} \left\{ \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left[\dfrac{1 - 2b_2^2\theta^2}{\varkappa_1(r + R)}(-m)^k\right]}{\left(-x + \dfrac{\theta}{\varkappa_1}(2kH - y) + \dfrac{\theta}{\varkappa_2} y_0\right)^2} \right\}_{\theta = \theta_k'} +$$

$$+ \frac{2i}{a_2} \sum_{k=0} \left\{ \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left[\dfrac{1 - 2b_2^2\theta^2}{\varkappa_1(r + R)}(-m)^k\right]}{\left(-x + \dfrac{\theta}{\varkappa_1}[2(k+1)H + y] + \dfrac{\theta}{\varkappa_2} y_0\right)^2} \right\}_{\theta = \theta_k''},$$

$$\varphi_2(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 t^2 - x^2 - (y - y_0)^2}} - \frac{i}{a_2}\left\{\frac{R^* - r}{\varkappa_2 (R + r)\left[-x + \frac{\theta}{\varkappa_2}(y + y_0)\right]}\right\}_{\theta=\theta_0} -$$

$$- \frac{4i\rho_1}{a_2\rho_2}\sum_{k=1}\left\{\frac{\frac{(1 - 2b_2^2\theta^2)^2}{\varkappa_1 (r + R)^2}(-m)^{k-1}}{-x + \frac{\theta}{\varkappa_2}(y + y_0) + \frac{\theta}{\varkappa_1}2kH}\right\}_{\theta=\theta_k}, \tag{4}$$

$$\psi_2(x, y, t) = \frac{4ib_2^2}{a_2}\left\{\frac{\theta(1 - 2b_2^2\theta^2)}{(r + R)\left(-x + \frac{\theta}{\lambda_2}y + \frac{\theta}{\varkappa_2}y_0\right)}\right\}_{\theta=\theta_0'''} +$$

$$+ \frac{8ib_2^2\rho_1}{a_2\rho_2}\sum_{k=1}\left\{\frac{\theta(1 - 2b_2^2\theta^2)\varkappa_2(-m)^{k-1}}{\varkappa_1 (r + R)^2\left(-x + \frac{\theta}{\lambda_2}y + \frac{\theta}{\varkappa_2}y_0 + \frac{\theta}{\varkappa_1}2kH\right)}\right\}_{\theta=\theta_k'''}.$$

Через θ_k, θ'_k, θ''_k, θ'''_k обозначены, соответственно, комплексные корни уравнений:

$$\tau - \varkappa_2(y + y_0) + kh = 0,$$

$$\tau + \varkappa_1(y - 2kH) - \varkappa_2 y_0 = 0,$$

$$\tau - \varkappa_1[2(k + 1)H + y] - \varkappa_2 y_0 = 0,$$

$$\tau - \lambda_2 y - \varkappa_2 y_0 + kh = 0.$$

Суммирование в формулах (4) распространяется на комплексные корни названных уравнений. Функции $\varphi_1(x, y, t)$, $\varphi_2(x, y, t)$, $\psi_2(x, y, t)$ и представляют собой решение поставленной задачи.

Без существенных изменений проводится решение задачи и в том случае, когда в начальный момент в упругом полупространстве задан сосредоточенный импульс типа центра вращения.

Геофизический институт
Академии Наук СССР

Поступило
23 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. 2, гл. XII, 1937. [2] Н. В. Зволинский, ДАН, **56**, № 1 (1947). [3] В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболев, Тр. Сейсмологическ. ин-та АН СССР, № 10 (1930).