Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. СВЕКЛО

ИСТОЧНИКИ КОЛЕБАНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Представлено акдемиком В. И. Смирновым 8 XII 1947)

1. В работе (¹) нами был построен аналог функционально-инвариантных решений некоторой системы уравнений с частными производными. Эти решения имеют вид:

$$u_i(x, y, t) = \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Re}\left[\int^{\theta_k} A_{ik}(\tau)\, w_k(\tau)\, d\tau\right] \quad (i=1,\ 2), \tag{1}$$

где $A_{ik}(\tau)$ — определенные функции (¹), $w_k(\tau)$ — произвольные функции и θ_k — функция x, y, t, заданная неявно соотношением:

$$t - \theta_k x + \lambda_k(\theta_k)\, y + K(\theta_k) = 0. \tag{2}$$

Для изученного нами частного класса анизотропных тел λ_k определяется уравнением:

$$\begin{vmatrix} a\theta^2 + d\lambda^2 - 1 & c\theta\lambda \\ c\theta\lambda & d\theta^2 + b\lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

и $A_{1k}(\tau) = c\tau\lambda_k(\tau)$, $A_{2k}(\tau) = a\tau^2 + d\lambda_k^2(\tau) - 1$.

Если в (2) положим $K \equiv 0$, то формулы (1) легко дадут решение, однородное нулевого измерения относительно x, y, t, имеющее особенность в точке $(0, 0, 0)$ при условии полной гиперболичности системы, т. е. если $c < \sqrt{ab} + d$. Эта особенность соответствует наличию источника колебаний в указанной точке.

Чтобы получить область комплексности однородных решений, нужно взять огибающую семейства прямых $1 - \theta\xi + \lambda\eta = 0$, где $\xi = x/t$, $\eta = y/t$, при вещественных θ и λ, связанных условием (3). В простейшем случае это будут две замкнутые выпуклые кривые на плоскости ξ, η, вложенные одна в другую. Областям, внутренним по отношению к указанным кривым, соответствуют две переменные θ_1 и θ_2, заполняющие два листа римановой поверхности с точками разветвления второго порядка, которые получим, если приравняем нулю дискриминант уравнения (3). Кривые, являющиеся границами этих областей, перейдут в разрезы на вещественной оси вдоль отрезков $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, $\left(-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right)$. Вне этих границ θ_1 и θ_2 вещественны и сохраняют постоянное значение вдоль полукасательных к ним.

Пусть w_1, w_2 — ветви аналитической функции w, однозначной на римановой поверхности, составленной из упомянутых листов, склеенных вдоль разрезов, соединяющих точки разветвления. Тогда решение (согласно обозначениям (¹))

$$u(x, y, z)=\operatorname{Re}\left\{c\int^{\theta_1}\tau\lambda_1(\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau+c\int^{\theta_2}\tau\lambda_2(\tau)\, w_2(\tau)\, d\tau\right\},$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z)=\operatorname{Re}\Big\{&\int^{\theta_1}[a\tau^2+d\lambda_1^2(\tau)-1]\, w_1(\tau)\, d\tau+ \\ &+\int^{\theta_2}[a\tau^2+d\lambda_2^2(\tau)-1]\, w_2(\tau)\, d\tau,\Big\}\end{aligned} \tag{4}$$

однозначно на этой поверхности и, следовательно, на плоскости ξ, η, т. е. во всем пространстве x, y, t. Выбирая в качестве w функцию, вещественная часть которой на разрезах $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, $\left(-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right)$ обращается в нуль, получим решение, отличное от нуля внутри областей комплексности и равное нулю вне их, т. е. решение, характеризующее упругие колебания неограниченной анизотропной плоскости в том случае, когда в начале координат действует источник колебаний типа мгновенного импульса.

2. Положим, что в момент $t=0$ из точки $x=0$, $y=y_0$ распространяется возмущение, описываемое формулами:

$$u(x, y, t)=\operatorname{Re}[u_1(\theta_1)+u_2(\theta_2)]=\operatorname{Re}\left\{c\int^{\theta_1}\tau\lambda_1(\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau+c\int^{\theta_2}\tau\lambda_2(\tau)\, w_2(\tau)\, d\tau\right\}$$

$$v(x, y, t)=\operatorname{Re}[v_1(\theta_1)+v_2(\theta_2)]=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\int^{\theta_1}[a\tau^2+d\lambda_1^2(\tau)-1]\, w_1(\tau)\, d\tau+\int^{\theta_2}[a\tau^2+d\lambda_2^2(\tau)-1]\, w_2(\tau)\, d\tau\right\}. \tag{5}$$

Переменные θ_1, θ_2 определяются соотношениями:

$$t-\theta_1 x+\lambda_1(y-y_0)=0, \quad t-\theta_2 x+\lambda_2(y-y_0)=0 \qquad (y_0>0).$$

Для полуплоскости $y>0$ формулы (5) будут описывать движение лишь при $t<y_0/\sqrt{b}$. Начиная с момента времени $t=y_0/\sqrt{b}$, появится отраженное возмущение. В момент $t=y_0/\sqrt{b}$ к границе $y=0$ полуплоскости придут колебания, связанные с решением u_1, v_1, а в момент $t=y_0/\sqrt{d}$ — с решением u_2, v_2.

Считая границу среды свободной от напряжений:

$$(c-d)\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{y=0}=0, \tag{6}$$

определим в качестве продолжений функций u_1, v_1 и u_2, v_2 для моментов времени $t>y_0/\sqrt{b}$ и, соответственно, $t>y_0/\sqrt{d}$ функции:

$$\begin{aligned} u_3(\theta_3)&=-c\int^{\theta_3}\tau\lambda_1(\tau)\, w_3(\tau)\, d\tau, \\ v_3(\theta_3)&=\int^{\theta_3}[a\tau^2+d\lambda_1^2(\tau)-1]\, w_3(\tau)\, d\tau, \\ u_5(\theta_5)&=-c\int^{\theta_5}\tau\lambda_2(\tau)\, w_5(\tau)\, d\tau, \\ v_5(\theta_5)&=\int^{\theta_5}[a\tau^2+d\lambda_2^2(\tau)-1]w_5(\tau)\, d\tau;\end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
u_4(\theta_4) &= -c\int^{\theta_4}\tau\lambda_2(\tau)\,w_4(\tau)\,d\tau,\\
v_4(\theta_4) &= \int^{\theta_4}[a\tau^2+d\lambda_2^2(\tau)-1]\,w_4(\tau)\,d\tau,\\
u_6(\theta_6) &= -c\int^{\theta_6}\tau\lambda_1(\tau)\,w_6(\tau)\,d\tau,\\
v_6(\theta_6) &= \int^{\theta_6}[a\tau^2+d\lambda_1^2(\tau)-1]\,w_6(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где переменные θ_3, θ_5, θ_4, θ_6 определены соотношениями:

$$t-\theta_3x-\lambda_1(y+y_0)=0,\quad t-\theta_5x-\lambda_2(y+y_0)+(\lambda_2-\lambda_1)y_0=0, \tag{9}$$

$$t-\theta_4x-\lambda_2(y+y_0)=0,\quad t-\theta_6x-\lambda_1(y+y_0)+(\lambda_1-\lambda_2)y_0=0. \tag{10}$$

Вид этих соотношений определяется из тех соображений, что, во-первых, на границе среды должно быть $\theta_3=\theta_5=\theta_1$ и $\theta_4=\theta_6=\theta_2$, и что, во-вторых, переменные θ_3, θ_5 и θ_4, θ_6 характеризуют отраженные лучи, вдоль которых с возрастанием t y увеличивается.

Переменные θ_3 и θ_5 заполнят на римановой поверхности ту же область, что и переменная θ_1, соответствующая падающим характеристическим лучам, достигающим границы среды. В том же отношении находятся переменные θ_4, θ_6 и θ_2.

Вид функций w_3, w_5 и w_4, w_6 определим из условия, что суммы функций $u_1+u_3+u_5$, $v_1+v_3+v_5$ и $u_2+u_4+u_6$, $v_2+v_4+v_6$ должны удовлетворять граничным условиям (6).

Производя выкладки, получим:

$$w_3(\theta)=-\frac{R_1(\theta)}{R(\theta)}\,\frac{w_1(\theta)}{\lambda_1-\lambda_2},\qquad w_5(\theta)=\frac{A(\theta,\lambda_1)}{R(\theta)}\,\frac{w_1(\theta)}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$w_4(\theta)=-\frac{R_1(\theta)}{R(\theta)}\,\frac{w_2(\theta)}{\lambda_2-\lambda_1},\qquad w_6(\theta)=\frac{A(\theta,\lambda_2)}{R(\theta)}\,\frac{w_2(\theta)}{\lambda_2-\lambda_1},$$

где

$$R_1(\theta)=\left[\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}+\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}\right](\lambda_1+\lambda_2),$$

$$A(\theta,\lambda_i)=-2\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\{[ab-c(c-d)^2]\,\theta^2+bd\lambda_i^2-b\}\,[a\theta^2-(c-d)\,\lambda_i^2-1]}{c\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}}\,\lambda_i,$$

$$R(\theta)=\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}-\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}$$

— функция Релея рассматриваемой среды.

Очевидно, функции

$$u_1(x,y,z)=\operatorname{Re}(u_3+u_4)=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{c\int^{\theta_3}\tau\lambda_1(\tau)\,\frac{R_1(\tau)}{R(\tau)}\,\frac{w_1(\tau)}{\lambda_1-\lambda_2}\,d\tau+c\int^{\theta_4}\tau\lambda_2(\tau)\,\frac{R_1(\tau)}{R(\tau)}\,\frac{w_2(\tau)}{\lambda_2-\lambda_1}\,d\tau\right\},$$

$$v_1(x, y, t) = \mathrm{Re}\,(v_3 + y_4) =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int^{\theta_3} [a\tau^2 + d\lambda_1^2(\tau) - 1] \frac{R_1(\tau)}{R(\tau)} \frac{w_1(\tau)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int^{\theta_4} [a\tau^2 + d\lambda_2^2(\tau) - 1] \frac{R_1(\tau)}{R(\tau)} \frac{w_2(\tau)}{\lambda_2 - \lambda_1} d\tau \right\}; \tag{11}$$

$$u_2(x, y, t) = \mathrm{Re}\,(u_5 + u_6) =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ c \int^{\theta_5} \tau\lambda_2(\tau) \frac{A(\tau, \lambda_1)}{R(\tau)} \frac{w_1(\tau)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\tau + c \int^{\theta_6} \tau\lambda_1(\tau) \frac{A(\tau, \lambda_2)}{R(\tau)} \frac{w_2(\tau)}{\lambda_2 - \lambda_1} d\tau \right\},$$

$$v_2(x, y, t) = \mathrm{Re}\,(v_5 + v_6) =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int^{\theta_5} [a\tau^2 + d\lambda_2^2(\tau) - 1] \frac{A(\tau, \lambda_1)}{R(\tau)} \frac{w_1(\tau)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int^{\theta_6} [a\tau^2 + d\lambda_1^2(\tau) - 1] \frac{A(\tau, \lambda_2)}{R(\tau)} \frac{w_2(\tau)}{\lambda_2 - \lambda_1} d\tau \right\}. \tag{12}$$

однозначны на римановых поверхностях, составленных соответственно из листов θ_3, θ_4 и θ_5, θ_6. Таким образом, получаем решение, характеризующее отраженное возмущение.

Огибающая прямой $t - \theta_3 x - \lambda_1(y + y_0) = 0$ при значениях θ_3 из промежутка $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, а также часть огибающей прямой $t - \theta_4 x - \lambda_2(y + y_0) = 0$, соответствующая значениям θ_4 из промежутка $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, и две полукасательные $t \mp \frac{1}{\sqrt{a}} x - \lambda_2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}\right)(y + y_0) = 0$ к ней определят в плоскости $t = \mathrm{const}$ два фронта отраженных волн, связанных с решением (11). Это решение соответствует фиктивному источнику колебаний в точке $x = 0$, $y = -y_0$.

Границы отраженного возмущения, связанного с решением (12), получим, если найдем в плоскости $t = \mathrm{const}$ огибающие прямых $t - \theta_5 x - \lambda_2(y + y_0) + (\lambda_2 + \lambda_1) y_0 = 0$, $t - \theta_6 x - \lambda_1(y + y_0) + (\lambda_1 - \lambda_2) y_0 = 0$ при значениях θ_5, θ_6 из промежутка $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$.

Поступило
8 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Свекло, ДАН, 58, № 5 (1948).