Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

ГИДРОМЕХАНИКА

Е. В. СТУПОЧЕНКО

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ НА ОБРАЗОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБАХ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 26 XII 1947)

Образование ударных волн при возникновении детонации в трубах происходит в условиях значительных скоростей потока. При этом, в частности в опытах с шероховатыми трубами, можно ожидать заметной величины внешнего трения, вследствие чего желательно получение выражений, позволяющих оценить влияние внешнего трения на образование ударных волн.

Уравнение адиабатического движения упругой среды в цилиндрической трубе может быть записано так ([1]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \tag{1}$$

Ось x направлена по оси трубы; x — координата данного слоя среды в начальном состоянии; u — смещение этого слоя в момент времени t; плотность и давление среды в начальном состоянии принимаются постоянными; F — результирующая внешних сил (направленных по оси x), действующая на единицу массы; функция φ определяется законом изменения давления в рассматриваемом движении в зависимости от плотности.

F считаем зависящей только от скорости среды *

$$F = -kR\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{2}$$

где k постоянно.

Уравнение движения будет:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - kR\left(\frac{du}{\partial t}\right). \tag{1'}$$

Характер схематизации ясен из уравнения (1): одномерная задача; учет сил внешнего трения как сил, равномерно распределенных по данному слою ([1]); пренебрежение теплотой трения.

Пусть при $t=0$ среда находится в покое, затем слой $x=0$ приходит в движение с положительным ускорением, например, под действием поршня. Это движение принимаем достаточно плавным, чтобы слой $x=0$ сам не являлся бы местом возникновения ударных

---

* Случай $F\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ в рассматриваемом приближении на основании (9) приводится к (1′).

волн. Спрашивается, где и когда распространяющееся возмущение, вначале достаточно непрерывное, эволюционирует в ударную волну? В случае отсутствия трения задача была решена Гюгонио ([1]). Более точная формулировка ее ясна из дальнейшего.

Вводим обозначения:

$$\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left[\psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^2, \tag{3}$$

$$\frac{du}{dt}=v, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=z, \tag{3'}$$

где v — скорость среды, z — расширение на единицу объема в начальном состоянии. Уравнение характеристик будет:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\pm\psi'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Из (1') и (4) получаем вдоль характеристик

$$\frac{dv}{dt}\mp\psi'(z)\frac{dz}{dt}=-kR(v). \tag{5}$$

Отсюда

$$v-\psi(z)=\alpha-k\int\limits_{(\alpha=\mathrm{const})}R(v)\,dt, \tag{6}$$

$$v+\psi(z)=\beta-k\int\limits_{(\beta=\mathrm{const})}R(v)\,dt, \tag{6'}$$

где α и β — постоянные интегрирования. В качестве нижнего предела интеграла в правой части (6') возьмем точку пересечения соответствующей характеристики с фронтом возмущения. Тогда

$$\beta=\psi(0). \tag{7}$$

Ограничивая рассмотрение областью, достаточно близкой к фронту возмущения, где можно пренебречь интегралом в (6'), получим из (6) и (6') приближенные соотношения:

$$2v=\psi(0)+\alpha-k\int\limits_{(\alpha=\mathrm{const})}R(v)\,dt, \tag{8}$$

$$v+\psi(z)=\psi(0). \tag{9}$$

Из (8) получаем закон изменения скорости вдоль характеристик $\alpha=\mathrm{const}$:

$$\Phi(v)=-\frac{k}{2}t+\mathrm{const}, \tag{10}$$

где введено обозначение

$$\Phi(v)=\int\frac{dv}{R(v)}. \tag{11}$$

Таким образом, при наличии внешнего трения распространяется со скоростью звука состояние среды, меняющееся со временем, согласно (10) и (9).

Определим промежуток времени τ, через который посланное поршнем „элементарное возмущение“ эволюционирует в ударную волну. Пусть в момент времени t_0 скорость поршня v_0. Скорость среды v_1

в соответствующей „элементарной волне“ будет изменяться, согласно (10), по закону

$$\Phi(v_1) - \Phi(v_0) = -\frac{k}{2}(t - t_0). \tag{12}$$

Пусть в момент времени $t_0 + \Delta t$ скорость поршня $v_0 + \Delta v_0$. Для соответствующей „элементарной волны“ будем иметь

$$\Phi(v_2) - \Phi(v_0 + \Delta v_0) = -\frac{k}{2}(t - t_0 - \Delta t). \tag{12'}$$

Время и место соединения этих элементарных волн — если оно вообще произойдет — и будут соответствовать образованию ударной волны. Пусть $t_0 + \tau$ — момент соединения элементарных волн; X — x — координата места соединения; z_1 и z_2 — расширения, соответственно, в первой и второй элементарных волнах. Тогда

$$X = \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau} \psi'(z_1)\,dt, \qquad X = \int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0+\tau} \psi'(z_2)\,dt. \tag{13}$$

Из (9), (12) и (12') с точностью до малых высших порядков получаем

$$\psi'(z_1)(z_2 - z_1) \cong -(v_2 - v_1), \tag{14}$$

$$\psi'(z_2) - \psi'(z_1) \cong \psi''(z_1)(z_2 - z_1), \tag{15}$$

$$\Phi'(v_1)(v_2 - v_1) \cong \Phi'(v_0)\Delta v_0 + \frac{k}{2}\Delta t, \tag{16}$$

$$\Phi'(v_1)\frac{dv_1}{dt} = -\frac{k}{2}. \tag{17}$$

Исключая X из (13) и пользуясь (14) — (17), получим

$$-\int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0+\tau} \psi''(z_1)\frac{\Phi'(v_0)\Delta v_0 + \frac{k}{2}\Delta t}{k/2}\frac{dz_1}{dt}\,dt \cong \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta\tau} \psi'(z_1)\,dt, \tag{18}$$

или, интегрируя, и переходя к пределу при $\Delta t = 0$,

$$\{\psi'(z_0) - \psi'[z_1(\tau)]\}\left\{1 + \frac{2}{kR(v_0)}\frac{dv_0}{dt}\right\} = \psi'(z_0). \tag{19}$$

Легко показать, что при $k \to 0$ (19) переходит в результат Гюгонио ([1]).

Для идеального газа

$$\psi'(z) = a\left(1 + \frac{m-1}{2a}v\right)^{\frac{m+1}{m-1}}, \tag{20}$$

где a — скорость звука при $v = 0$, $m = c_p/c_v$.

Пусть θ — оператор, обратный оператору Φ. Тогда из (12)

$$v_1 = \theta\left[\Phi(v_0) - \frac{k}{2}(t - t_0)\right]. \tag{21}$$

При помощи (20) и (21) из (19) получаем

$$\theta\left[\Phi(v_0)-\frac{k}{2}\tau\right]=\frac{\dfrac{2a}{m-1}+v_0}{\left(1+\dfrac{k}{2}\,\dfrac{R(v_0)}{dv_0/dt}\right)^{\frac{m-1}{m+1}}}-\frac{2a}{m-1}. \tag{22}$$

Отсюда

$$\Phi(v_0)-\frac{k}{2}\tau=\Phi\left(\frac{\dfrac{2a}{m-1}+v_0}{\left(1+\dfrac{k}{2}\,\dfrac{R(v_0)}{dv_0/dt}\right)^{\frac{m-1}{m+1}}}-\frac{2a}{m-1}\right). \tag{23}$$

Не производя в настоящей заметке исследования результата (23), укажем лишь, что возможны случаи, когда функция $\Phi(x)$ для некоторого значения x обращается в $-\infty$; например, для $R(v)=v^s$, где $s\geqslant 1$, $\Phi(0)=-\infty$. В этом случае, приравнивая нулю выражение, являющееся аргументом функции Φ в правой части (23), получим уравнение, определяющее критическое значение k_0 коэффициента k. При значениях $k\geqslant k_0$ образование ударных волн невозможно (при данных v_0 и dv_0/dt). При $0<s<1$ $\Phi(0)=0$, однако определенное выше значение k_0 оказывается критическим и здесь, так как, хотя из (23) получаем конечное τ, из (23) и (12) следует, что скорость v_1 в месте соединения элементарных волн равна нулю ($k=k_0$).

Из (13), (20) и (21) получаем

$$X=a\int\limits_{t_0}^{t_0+\tau}\left(1+\frac{m-1}{a}\,\theta\left[\Phi(v_0)-\frac{k}{2}(t-t_0)\right]\right)^{\frac{m+1}{m-1}}dt. \tag{24}$$

Если $\dfrac{m+1}{m-1}=n$, где n — целое число (классическая статистика), интегрирование в (24) легко выполняется для ряда практически важных случаев (законы трения типа $R(v)=v^s$).

Научно-исследовательский институт физики
Московского
государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hugoniot, J. l'École Polytechn., **57** (1887); **58** (1889).