Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

*ГИДРОМЕХАНИКА*

В. В. ВЕДЕРНИКОВ

# К ТЕОРИИ ДРЕНАЖА

*(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 27 XII 1947)*

1. Решение достаточно общей задачи о дренаже, когда причиной заболачивания являются не только атмосферные осадки ([1]) (или поливы), но и фильтрация из пласта с напорными (или артезианскими) водами вверх через покрывающую этот пласт толщу земли, имеет существенное значение.

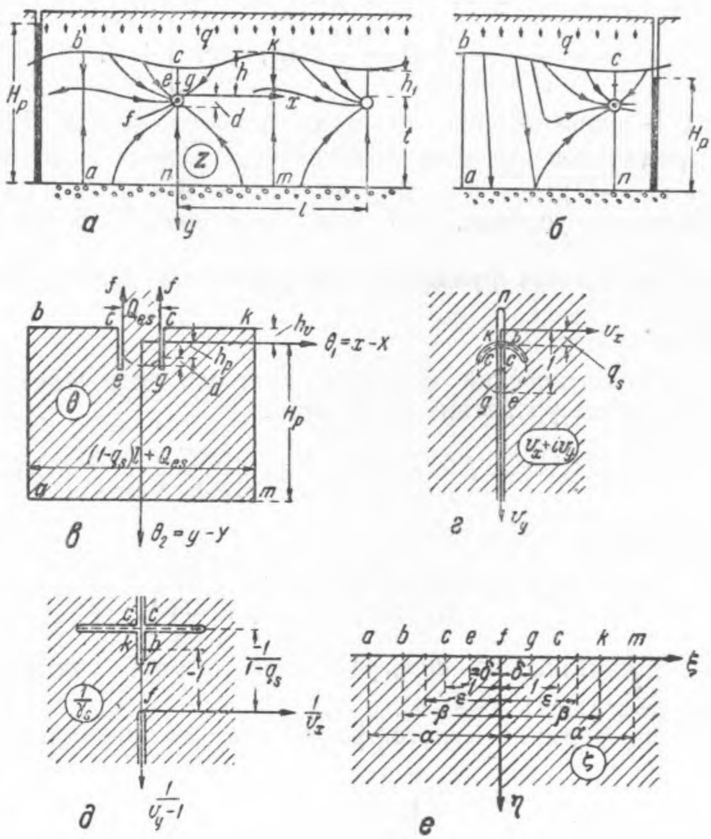


Рис. 1

Решение такой задачи (рис. 1, *а* или *б*) может быть получено с помощью ранее данного метода ([2]). Обозначим пьезометрическую высоту давления на верхней границе пласта $H_p$ и глубину залегания пласта под верхом дрен $t$. Осушение производится рядом дрен „диаметром“ $d$ на расстояниях $l$ между осями дрен, заложенных на глубине $h$ под свободной поверхностью в средине поля между дренами. На свободной поверхности в общем случае (как и в других наших работах) для учета влияния капиллярности грунта избыточное давление принимается равным $p' = -\gamma h_v$. В верхней точке дрены избыточное давление в общем случае $p_d' \neq 0$ и пьезометрическая высота $h_d = p_d'/\gamma$ (больше нуля, нуль или, в случае вакуум-дренажа, меньше нуля).

Свободная поверхность — не линия тока, поскольку принимается, что на свободную поверхность просачивается сверху расход воды $q = q_s k$ на единицу площади горизонтальной проекции свободной поверхности. Расход, притекающий в каждой дрене с обеих сторон, $Q = kLQ_{es}$, где $L$ — длина дрены и $k$ — коэффициент фильтрации грунта над пластом.

Соответствие точек ясно из рис. 1, *а* (или *б*, *в*, *г*, *д* и *е*).

Заметим, что на вертикальной линии тока ($x = 0$) от свободной поверхности к дрене имеется максимум давления ($\partial\theta_2/\partial y = \partial h_p/\partial y = 0$), причем в точке максимума давления скорость фильтрации равна коэффициенту фильтрации (так как $\partial\theta_2/\partial y = v_y - 1$).

2. По формуле Кристоффеля — Шварца находим:

$$\theta = z - Z = A\int\frac{(\varepsilon^2-\delta^2)\,d\zeta}{\zeta\sqrt{\alpha^2-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-\beta^2}\sqrt{\zeta^2-1}} + C =$$

$$= -\frac{A}{\sqrt{\alpha^2-1}}\left[U - \frac{\delta^2}{\alpha^2}\Pi(n, \varphi, \bar{k})\right] + C. \qquad (1)$$

Здесь $U$ — эллиптический интеграл первого рода и $\Pi(n, \varphi, \bar{k})$ — третьего рода при модуле $\bar{k} = \sqrt{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-1)}$ и амплитуде $\varphi = \arcsin\sqrt{(\alpha^2-\zeta^2)/(\alpha^2-\beta^2)}$. Параметр $n = (\beta^2-\alpha^2)/\alpha^2$. Постоянную $C$ определяем из условия, что при $\zeta = \alpha$ (рис. 1, *в*) $\theta = iH_p + {}^1/_2(l + Q_{es} - lq_s)$.

Вычисление вычета функции $\theta$ относительно полюса $\zeta = 0$ дает $A = i\frac{\alpha\beta}{\delta^2}\frac{Q_{es}}{\pi}$.

Выражая эллиптический интеграл третьего рода через тэта-функции, переписываем уравнение (1) в виде:

$$\theta = \frac{l(1-q_s)+Q_{es}}{2} + i\frac{Q_{es}}{\pi}\left(SU + \frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4[\pi(U-a)/2K]}{\vartheta_4[\pi(U+a)/2K]}\right) + iH_p. \qquad (2)$$

Здесь обозначено:

$$S = \frac{\vartheta_4'(\pi a/2K)}{\vartheta_4(\pi a/2K)} - \frac{\beta(\alpha^2-\delta^2)}{\alpha\delta^2\sqrt{\alpha^2-1}},$$

причем $a$ — эллиптический интеграл первого рода при модуле $\bar{k}$ и амплитуде $\varphi = \arcsin(\sqrt{\alpha^2-1}/\alpha)$.

3. Затем по формуле Кристоффеля — Шварца находим:

$$\frac{1}{\gamma_s} = \frac{1}{v_x - i(v_y-1)} = A_1\int\frac{(\zeta^2-\varepsilon^2)\,\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-1}\,(\zeta^2-\delta^2)^2} + C_1 =$$

$$= A_1\frac{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2-1}}{(\beta^2-2\delta^2+1)(\zeta^2-\delta^2)} + C_1. \qquad (3)$$

Параметр $\varepsilon$ исключается в силу условия (рис. 1,*д*)

$$\int_1^\beta\frac{(\zeta^2-\varepsilon^2)\,\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}\sqrt{\beta^2-\zeta^2}\,(\zeta^2-\delta^2)^2} = 0.$$

При $\zeta = \beta$ и $\zeta = 1$ имеем

$$\frac{1}{\gamma_s} = -\frac{i}{1-q_s} = C_1.$$

4. Далее,

$$z = i\int \frac{1}{\gamma_s} d\theta = -i\frac{AA_1}{\alpha(\beta^2 - 2\delta^2 + 1)} \arcsin\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{\theta}{1-q_s} + C_2. \tag{4}$$

Из условия в бесконечно удаленной точке полуплоскости $\zeta$, которой отвечает $z = it$ и $\theta = iH_p$, получаем $C = i\left(t - \frac{H_p}{1-q_s}\right)$, а из условия в точке $\zeta = \alpha$, которой отвечает $z = {}^1/_2\, l + it$ и $\theta = {}^1/_2\, [l(1-q_s) + Q_{es}] + iH_p$, находим:

$$\frac{AA_1}{\alpha(\beta^2 - 2\delta^2 + 1)} = -i\frac{Q_{es}}{(1-q_s)\pi},$$

$$z = -\frac{Q_{es}}{(1-q_s)\pi} \arcsin\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{\theta}{1-q_s} - i\left(\frac{H_p}{1-q_s} - t\right). \tag{5}$$

При $\zeta < \alpha$

$$z = -\frac{Q_{es}}{(1-q_s)\pi} \operatorname{Ar\,ch}\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{\theta}{1-q_s} - i\left(\frac{H_p}{1-q_s} - t\right) - \frac{Q_{es}}{2(1-q_s)}. \tag{6}$$

Приведенный комплексный потенциал определится уравнением

$$Z = X + iY = i\frac{\varphi + i\psi}{k} = z - \theta = -\frac{Q_{es}}{(1-q_s)\pi} \arcsin\frac{\alpha}{\zeta} + \frac{q_s}{1-q_s}\theta - i\left(\frac{H_p}{1-q_s} - t\right). \tag{7}$$

5. Для определения связей между искомыми и заданными элементами и определения параметров $\alpha, \gamma, \delta$ используем условия соответствия точек, исключаем сток и вводим вместо него дрену, используя условия, заданные на дрене *. Параметр $\delta$ исключается и величина $S$ определяется из уравнения (2) подстановкой в него условия, что при $\zeta = \beta$ имеем $U = K$ и $\theta = {}^1/_2\, [l(1-q_s) + Q_{es}] - ih_v$,

$$H_p + h_v = -\frac{Q_{es}}{\pi} SK = H. \tag{8}$$

Условие в точке $\zeta = 1$, $\frac{\alpha^2 - \zeta^2}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{1}{k^2}$, $U = K - iK_1$ и $\theta = {}^1/_2\, Q_{es} - ih_v$ при подстановке его в уравнение (2) дает

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{1-q_s}\left(H\frac{K_1}{K} - Q_{es}\frac{a}{2K}\right). \tag{9}$$

Для верхней точки дрены ($\zeta = \xi_0$, $\theta = {}^1/_2\, Q_{es} + ih_d$) из уравнения (2) получаем

$$h_d = H_p - H\frac{U_{\xi_0}}{K} = \frac{Q_{es}}{2\pi} \ln\frac{\vartheta_1[\pi(U_{\xi_0} - a)/2K]}{\vartheta_1[\pi(U_{\xi_0} + a)/2K]}, \tag{10}$$

* На необходимость учета условий, заданных на дрене, нами было указано в ([3]) и в других более ранних статьях по теории фильтрации. При отсутствии учета этих условий нехватает данных для определения параметров, что и получилось в решениях Девисона и др. других задач.

и для нижней точки дрены $[\zeta = i\eta_0,\ \theta = i(h_d + d)]$

$$h_d + d = H_p - H\frac{U_{\eta_0}}{K} + \frac{Q_{es}}{2\pi}\ln\frac{\vartheta_1[\pi(a - U_{\eta_0})/2K]}{\vartheta_1[\pi(a + U_{\eta_0})/2K]}. \qquad (11)$$

В (10) и (11) $U_{\xi_0}$ и $U_{\eta_0}$ означают эллиптические интегралы первого рода при модуле $\bar{k}$ и амплитудах $\varphi = \arcsin\sqrt{(\alpha^2 - 1)/(\alpha^2 - \xi_0^2)}$ и $\varphi = \arcsin\sqrt{(\alpha^2 - 1)/(\alpha^2 + \eta_0^2)}$ соответственно.

Из уравнения (7) подстановкой в него условий в нижней точке дрены ($\zeta = i\eta_0$, $Z = -ih_d$) получаем формулу для определения $\eta_0$*:

$$\eta_0 = \frac{\alpha}{\operatorname{sh}[\pi(H_p - t - h_d + q_s t - q_s d)/Q_{es}]}, \qquad (12)$$

а из того же уравнения (7), переписанного для верхней точки дрены ($\zeta = i\xi_0$, $Z = -{}^1/_2 Q_{es} - ih_d$), и формулы (12) получаем (в силу того, что очертание дрены является эквипотенциалью $Y = -h_d$) формулу для определения $\xi_0$ в виде

$$\xi_0 = \frac{\alpha}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi q_s d}{Q_{es}} + \operatorname{Ar\,sh}\frac{\alpha}{\eta_0}\right)}. \qquad (13)$$

При $\zeta = 1$, $Z = -{}^1/_2\, Q_{es} - i(h_1 - h_v)$ из уравнения (7) находим формулу для определения высоты нависания грунтовых вод $(h_1 - h_v)$ над дреной:

$$h_1 - h_v = \frac{1}{1 - q_s}\left(H - \frac{Q_{es}}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\alpha\right) - t \qquad (14)$$

и при $\zeta = \beta$, $Z = -{}^1/_2(Q_{es} - lq_s) - i(h - h_v)$ получаем формулу для определения глубины $(h - h_v)$ заложения верха дрен под уровнем грунтовых вод в средине поля между дренами в виде:

$$h - h_v = \frac{1}{1 - q_s}\left(H - \frac{Q_{es}}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\frac{\alpha}{\beta}\right) - t - h_v. \qquad (15)$$

6. Имея заданные $q_s, h_d, h_v, d, H_p$ и расстояние между дренами $l$, по уравнениям (9), (10) и (11) определяем параметры $\alpha$ и $\beta$ (зная, что $\xi_0$ и $\eta_0$ определяются по формулам (12) и (13)) и расход, поступающий в дрену, а затем, по формуле (15),— искомую глубину заложения дрены. Если задана глубина заложения дрен, то для определения параметров $\alpha$ и $\beta$ и фильтрационного расхода служат уравнения (10), (11) и (15), а для определения расстояния $l$ между дренами служит формула (9).

Если $h_v$ и $h_d$ равны нулю и диаметр дрены равен „критическому“ (левая и правая ветви свободной поверхности касаются друг друга в верхней точке дрены), то $\xi_0 = 1$.

Положив в уравнениях $q_s = 0$, получим решение задачи о дренаже, предназначенном для отвода только поступающих снизу напорных вод.

Секция по научной разработке
проблем водного хозяйства
Академии Наук СССР

Поступило
14 VI 1947

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Ведерников, ДАН, 23, № 4 (1939). [2] V. V. Vedernikov, C. R. 202, № 13 (1936) et 202, № 16 (1936) (errata). [3] В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, 1939.

* Из рассмотрения формулы (12) следует, что необходимость в устройстве дренажа наступает, когда выполняется условие $H_p > (1 - q_s)t + h_d + q_s d$.