Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Е. А. ЩЕГОЛЬКОВ

ОБ УНИФОРМИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ B-МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 23 XII 1947)

Как показал Н. Н. Лузин [1], всякое плоское B-множество униформизируется посредством CA-множества. Уточняя этот результат для случая плоских B-множеств, пересекающихся с прямыми $x=\text{const}$ по не более чем счетным множествам, П. С. Новиков [2] показал, что униформизация может быть произведена посредством B-множества. Позднее П. С. Новиков [3] показал, что всякое плоское B-множество, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по замкнутым множествам, также униформизируется посредством B-множества.

В связи с этим П. С. Новиков предложил мне выяснить вопрос об униформизации плоского B-множества, которое пересекается с прямыми $x=\text{const}$ по множествам типа F_σ, что является естественным продолжением и обобщением двух его предыдущих результатов. В настоящем сообщении дается решение этого вопроса.

Для сокращения формулировок плоское множество условимся называть элементарным, если оно есть пересечение последовательности вложенных друг в друга множеств, каждое из которых пересекается с прямыми $x=\text{const}$ по конечному числу замкнутых отрезков.

Лемма. *Элементарное CA-множество, проекция которого есть B-множество, униформизируется посредством B-множества.*

Доказательство. Прежде всего очевидно, что элементарное CA-множество обладает тем свойством, что его проекция, так же как и проекция его части, лежащей в замкнутой полосе $a\leqslant y\leqslant b$, есть CA-множество. На это свойство мы будем ссылаться в предлагаемой ниже конструкции.

Пусть дано элементарное CA-множество U. Будем считать, что оно целиком заключено в некотором прямоугольнике J. Проекцией U на нижнюю сторону прямоугольника будет B-множество $\mathcal{E}$. Обозначим через E_0 гребенку, образованную всеми точками прямоугольника J, проектирующимися в точки множества $\mathcal{E}$. Разделим прямоугольник J параллелью к оси OX на две равные замкнутые полосы J_1 и J_2 и рассмотрим множества $J_1\cdot U$ и $J_2\cdot U$. Эти множества и их проекции $\pi_x(J_1U)$ и $\pi_x(J_2U)$ суть CA-множества, причем $\pi_x(J_1U)+\pi_x(J_2U)=\mathcal{E}$.

Первый принцип отделимости позволяет утверждать: если дана последовательность CA-множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n=H$, где H есть B-множество, то существует последовательность B-множеств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ таких, что $\mathcal{E}_i\subset E_i$, $\mathcal{E}_i\cdot\mathcal{E}_j=0$ $(i\neq j)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{E}_i=H$.

В нашем случае для множеств $\pi_x(J_1U)$ и $\pi_x(J_2U)$ существуют, следовательно, два B-множества $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ такие, что $\mathscr{E}_1 \subset \pi_x(J_1U)$, $\mathscr{E}_2 \subset \pi_x(J_2U)$, $\mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 = 0$ и $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$.

Пусть E^1 — гребенка, образованная всеми точками полосы J_1, проектирующимися в точки $\mathscr{E}_1$; E^2 — гребенка полосы J_2, проектирующаяся в точки $\mathscr{E}_2$, и $E_1 = E^1 + E^2$. E_1 есть B-множество, которое пересекается с прямыми $x = \text{const}$ по одному отрезку, причем $\pi_x(E_1) = \mathscr{E}$ и $E_1 \subset E_0$.

Рассмотрим пересечение $U \cdot E_1$, являющееся, очевидно, элементарным CA-множеством, и разделим прямоугольник J параллелями к оси OX на четыре равные замкнутые полосы: J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}.

Пусть $Q_{n_1n_2}$ — совокупность всех тех точек полосы $J_{n_1n_2}$, абсциссы которых принадлежат проекции $J_{n_1n_2} \cdot U \cdot E_1$. Положим $Q_2 = \sum\limits_{n_1n_2} Q_{n_1n_2}$, суммирование распространяется на все пары $n_1 n_2$, где n_1 и n_2 принимают значения 1 или 2. Очевидно, все $Q_{n_1n_2}$ и Q_2 суть CA-множества.

Пусть $P_{n_1n_2}$ множество всех тех точек $J_{n_1n_2}$, которые принадлежат прямым, целиком погруженным в множество $Q_2 \cdot E_1$ в полосе $J_{n_1n_2}$. Очевидно, все $P_{n_1n_2}$ суть CA-множества, так же как и их проекции на ось OX, причем

$$\sum_{(n_1n_2)} \pi_x(P_{n_1n_2}) = \mathscr{E}.$$

Существуют четыре B-множества: $\mathscr{E}_{11}$, $\mathscr{E}_{12}$, $\mathscr{E}_{21}$, $\mathscr{E}_{22}$ таких, что $\mathscr{E}_{n_1n_2} \subset \pi_x(P_{n_1n_2})$, $\mathscr{E}_{n_1n_2} \cdot \mathscr{E}_{n_1'n_2'} = 0$, где $n_1 \neq n_1'$ или $n_2 \neq n_2'$ и $\sum\limits_{(n_1n_2)} \mathscr{E}_{n_1n_2} = \mathscr{E}$.

Пусть $E_{n_1n_2}$ — гребенка, образованная точками полосы $J_{n_1n_2}$, проектирующимися в точки множества $\mathscr{E}_{n_1n_2}$, и $E_2 = \sum\limits_{(n_1n_2)} E_{n_1n_2}$. E_2 есть B-множество, которое пересекается с прямыми $x = \text{const}$ по одному отрезку, причем $\pi_x(E_2) = \mathscr{E}$ и $E_2 \subset E_1$.

Продолжая указанный процесс неограниченно, получим последовательность плоских B-множеств $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots$, каждое из которых пересекается с прямыми $x = \text{const}$ по одному отрезку, причем отрезки, соответствующие последовательным множествам, оказываются вложенными друг в друга и имеют длины, стремящиеся к нулю.

Множество $E = \prod\limits_{k=0}^{\infty} E_k$ униформно относительно оси OY, так как прямая $x = \text{const}$ пересекает последовательность множеств E_k по стягивающейся последовательности отрезков.

Множество E содержится в U. Действительно, точка $(x_0 y_0) \subset E$ на прямой P_{x_0} представляется в виде пересечения последовательности стягивающихся отрезков, по которым эта прямая пересекает множества E_k. Но из построения множеств E_k видно, что такие сегменты всегда содержат точки множества U, следовательно, точка $(x_0 y_0)$ будет предельной для множества $P_{x_0} \cdot U$. Так как множество U с каждой прямой $x = \text{const}$ пересекается по компактным множествам, то точка $(x_0 y_0)$ необходимо принадлежит множеству U. Наконец, из того, что $\pi_x(E_k) = \mathscr{E}$ для всех k, следует, что $\pi_x(E) = \mathscr{E}$.

Только что описанные свойства свидетельствуют о том, что множество E является униформизатором для множества U, и так как оно есть B-множество, лемма доказана.

Теорема. *Всякое плоское B-множество, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по множествам типа F_σ, униформизируется посредством B-множества.*

Доказательство. Пусть плоское B-множество M, пересекающееся с прямыми $x=\text{const}$ по множествам типа F_σ, задано как проекция униформного G_δ. Занумеруем все параллелепипеды, определяющие G_δ, и обозначим через E^n проекцию части G_δ, заключенной в параллелепипеде номера n. Получим последовательность множеств $E^1, E^2, \ldots, E^n, \ldots$, где все E^n суть B-множества и $M=\sum_{n=1}^{\infty} E^n$. Множество E^n заключено в прямоугольнике, являющемся проекцией соответствующего параллелепипеда. Разделим этот прямоугольник параллелями к оси OX на k равных замкнутых полос и обозначим их через J_{ik}, где i пробегает значения $1, 2, \ldots, k$. Пусть Q^n_{ki} проекция $J_{ki}\cdot E^n$ на нижнюю сторону полосы J_{ki}, а E^n_{ki} — гребенка, образованная всеми точками полосы J_{ki}, проектирующимися в точки Q^n_{ki}.

Положим $E^n_k=\sum_{i=1}^{k} E^n_{ki}$ и $\overline{E}^n=\prod_{k=1}^{\infty} E^n_k$. Все E^n_{ki}, E^n_k и $\overline{E}^n$ суть A-множества. $\overline{E}^n$ есть замыкание E^n вдоль оси OY.

Согласно второму принципу отделимости существует последовательность CA-множеств $H^n_1, H^n_2, \ldots, H^n_k, \ldots$ таких, что $H^n_k \supset E^n_k-\overline{E}^n$ и $\prod_{k=1}^{\infty} H^n_k=0$.

Пусть U^n_{ki} будет множество тех точек полосы J_{ki}, которые принадлежат прямым, целиком погруженным во множество H^n_k+M в полосе J_{ki}. Очевидно, что все U^n_{ki} суть CA-множества, так же как и множества $U^n_k=\sum_{i=1}^{k} U^n_{ki}$ и $U^n=\prod_{k=1}^{\infty} U^n_k$. Так как $U^n_k \subset H^n_k+M$, то $U^n=\prod_{k=1}^{\infty} U^n_k \subset M$.

Положим $\overline{U}^n_k=U^n_1\cdot U^n_2\cdot\ldots\cdot U^n_k$, тогда $U^n=\prod_{k=1}^{\infty} \overline{U}^n_k$. Каждое из $\overline{U}^n_k$ пересекается с прямыми $x=\text{const}$ по конечному числу отрезков. Так как $\overline{U}^n_1 \supset \overline{U}^n_2 \supset \ldots \supset \overline{U}^n_k \supset \ldots$, то U^n — элементарное CA-множество.

Покажем, что сумма проекций U^n по всем n равна проекции множества M. Действительно, так как $U^n \subset M$, то $\pi_x(U^n) \subset \pi_x(M)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(U^n) \subset \pi_x(M). \qquad (*)$$

Чтобы показать обратное включение, обозначим через R^n совокупность точек множества $\overline{E}^n$, которые лежат на прямых P_x, пересекающих это множество по множествам, целиком принадлежащим M. Очевидно, $R^n \subset U^n_k$, следовательно, $R^n \subset U^n$.

В. Я. Арсенин доказал лемму ([4]), из которой следует, что для всякой прямой P_x, пересекающей множество M, найдется такое $\overline{E}^n$, пересечение которого с этой прямой принадлежит M. Для соответствующего R^n имеем $\pi_x(R^n) \supset x$, поэтому $\pi_x(M)=\sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(R^n)$, но так как $R^n \subset U^n$, то $\pi_x(R^n) \subset \pi_x(U^n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(R^n) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(U^n)$ или $\pi_x(M) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(U^n)$.

Принимая во внимание (*), получим $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_x(U^n) = \pi_x(M)$.

Обозначим $\pi_x(M) = \mathscr{E}$, $\pi_x(U^n) = H_n$, тогда $\mathscr{E} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$. Так как $\mathscr{E}$ есть B-множество, а H_n суть CA-множества, то существует последовательность B-множеств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ таких, что $\mathscr{E}_i \subset H_i$, $\mathscr{E}_i \mathscr{E}_j = 0$ $(i \neq j)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k = \mathscr{E}$.

Возьмем гребенку из множества $\mathscr{E}_k$ вдоль оси OY и пересечем ее с соответствующим множеством U^k. Получающееся в результате такого пересечения множество $W_k = U^k \cdot \Gamma(\mathscr{E}_k)$ есть плоское элементарное CA-множество, проекция которого есть B-множество $\mathscr{E}_k$.

На основании леммы каждое из множеств W_k униформизируется посредством B-множества, которое мы обозначим через C_k.

Множество $C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$ есть униформное относительно оси OY множество, проекция которого на ось OX совпадает с проекцией исходного множества M. Действительно, $\pi_x(C_k) = \pi_x(W_k) = \mathscr{E}_k$, $\pi_x(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_x(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k = \mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_i \cdot \mathscr{E}_j = 0$ $(i \neq j)$. Так как C есть B-множество, теорема доказана.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
23 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Lusin, Mathematica, 4, 54 (1930). [2] P. Novikoff, Fund. Mat., 17, 8 (1931). [3] П. С. Новиков, ДАН, 23, № 9 (1939). [4] В. Я. Арсенин, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 403 (1940).