**Доклады Академии Наук СССР**
**1948. Том LIX, № 6**

*МАТЕМАТИКА*

О. В. САРМАНОВ

# О ПОРЯДКЕ РОСТА ЛИНИЙ РЕГРЕССИИ

*(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 XII 1947)*

Пусть $F(x, y)$ — плотность распределения двух переменных, определяющая корреляцию во всей плоскости и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{p(x)P(y)}\,dx\,dy = k^3 < \infty, \tag{1}$$

где $p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dy$, $P(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx$ — априорные плотности $x$ и $y$.

Рассмотрим линии регрессии $y$ по $x$

$$Y = \text{м. о.}_x\, y = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy \tag{2}$$

и $x$ по $y$

$$X = \text{м. о.}_y\, x = \psi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{F(x, y)}{P(y)}\,dx, \tag{2'}$$

а также линии регрессии модулей $|y|, |x|$ различных порядков

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy, \quad \psi_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\frac{F(x, y)}{P(y)}\,dx, \tag{3}$$

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)\,\frac{F(x, y)}{P(y)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\frac{F_2(x, y)}{P(y)}\,dx,$$

где

$$F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t, x)\,F(t, y)}{p(t)}\,dt \tag{4}$$

и вообще

$$\varphi_{2k}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k-1}(x)\,\frac{F(x, y)}{P(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k-2}(x)\,\frac{F_2(x, y)}{P(y)}\,dx, \tag{5}$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad \varphi_0(y) = |y|.$$

Таким образом, (4) симметрична и $\varphi_{2k}(y)$ представимы через симметризуемое ядро и его итерации. Если $F(x, y)=F(y, x)$ симметрична, то все функции $\varphi_k(y)=\psi_k(y)$ представимы через симметризуемое ядро.

Ранее мной было показано ([1]), что характеристические числа ядер, определяющих симметрическую корреляцию, как например (4), удовлетворяют условию $1<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\ldots$, причем $\lambda_0=1$ — простое характеристическое число с фундаментальной функцией $\sqrt{P(y)}$. Поэтому разложение по фундаментальным функциям для $\varphi_{2k}(y)$ имеет вид

$$\varphi_{2k}(y)=c_0+c_1\frac{\omega_1(y)}{\lambda_1^k}+c_2\frac{\omega_2(y)}{\lambda_2^k}+\ldots,$$

где $c_0=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|P(x)\,dx, \quad c_i=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\omega_i(x)P(x)\,dx, \quad i=1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье функций $x\sqrt{P(x)}$, а $\omega_i(y)$ — фундаментальные функции ядра $\dfrac{F_2(x, y)}{\sqrt{P(x)P(y)}}$.

Если $F(x, y)=F(y, x)$, то последнее разложение будет иметь место для всех $\varphi_k(y)=\psi_k(y)$, причем

$$\varphi_k(y)=c_0+c_1\frac{\omega_1(y)}{\lambda_1^k}+c_2\frac{\omega_2(y)}{\lambda_2^k}+\ldots,$$

где $\omega_i(y)$ — фундаментальные функции ядра $\dfrac{F(x, y)}{\sqrt{p(x)\,p(y)}}$.

В обоих случаях почти для всех $y$ существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{2k}(y)=c_0 \tag{6}$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(y)=c_0 \tag{6'}$$

в симметрическом случае. $c_0$ конечно, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|P(y)\,dy$ существует, что всегда предполагается. Для симметричной и несимметричной корреляций справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Не существует симметричной корреляции, удовлетворяющей условию* (1) *и такой, что линия регрессии* $\varphi(x)=$ м. о.$_x y$ *удовлетворяет условию*

$$|\varphi(x)|\geqslant\frac{1}{c}|x|^{1+\alpha}, \quad c>0, \quad \alpha>0 \quad \textit{при } |x|>A, \tag{7}$$

*причем* $\inf\varphi_1(x)>0$ *(условие* $\inf\varphi_1(x)>0$ *выполняется автоматически, если* $\varphi_1(x)$ *непрерывна при* $|x|\leqslant A$*).*

В самом деле, из (2) и (3) следует $\varphi_1(x)>0$, $\varphi_1(x)\geqslant|\varphi(x)|$; поэтому найдется $\lambda\geqslant c$ такое, что

$$\varphi_1(x)\geqslant\frac{1}{\lambda}|x|^{1+\alpha} \quad \text{при всех } x. \tag{7'}$$

На основании неравенства Ляпунова и (7') получим:

$$\varphi_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(y)\frac{F(x,y)}{p(x)}dy\geqslant\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}|y|^{1+\alpha}\frac{F(x,y)}{p(x)}dy\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|y|\frac{F(x,y)}{p(x)}dy\right]^{1+\alpha}=\frac{1}{\lambda}[\varphi_1(x)]^{1+\alpha}\geqslant\frac{1}{\lambda^{1+(1+\alpha)}}|x|^{(1+\alpha)^2}$$

и вообще

$$\varphi_k(x)\geqslant\frac{1}{\lambda^{1+(1+\alpha)+\ldots+(1+\alpha)^{k-1}}}|x|^{(1+\alpha)^k}=\lambda^{1/\alpha}\left[\frac{|x|^{\alpha}}{\lambda}\right]^{(1+\alpha)^k/\alpha};$$

поэтому при $|x|>\lambda^{1/\alpha}$ $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=\infty$, что противоречит (6').

Теорема 2. *Не существует несимметричной корреляции, удовлетворяющей условию* (1) *и такой, что линии регрессии* $\varphi(x)=$ м. о.$_x y$, $\psi(y)=$ м. о.$_y x$ *удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned}|\varphi(x)|&\geqslant\frac{1}{c}|x|^{1+\alpha}, & c>0,\quad \alpha>0\quad \text{при } |x|>A,\\ |\psi(y)|&\geqslant\frac{1}{c_1}|y|^{\frac{1}{1+\alpha}+\beta}, & c_1>0,\quad \beta>0\quad \text{при } |y|>B,\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

*причем* $\inf\varphi_1(x)>0$, $\operatorname{Inf}\psi_1(y)>0$.

В самом деле, тогда найдется $\lambda\geqslant\max\{c,c_1\}$ такое, что линии регрессии модулей удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x)&\geqslant\frac{1}{\lambda}|x|^{1+\alpha} & \text{при всех } x,\\ \varphi_1(y)&\geqslant\frac{1}{\lambda^{\beta}}|y|^{\frac{1}{1+\alpha}+\beta} & \text{при всех } y.\end{aligned}\right\}\qquad(8')$$

Тогда по неравенству Ляпунова и по (8') получим:

$$\varphi_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\frac{F(x,y)}{P(y)}dx\geqslant\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{1+\alpha}\frac{F(x,y)}{P(y)}dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{F(x,y)}{P(y)}dx\right]^{1+\alpha}=\frac{1}{\lambda}[\psi_1(y)]^{1+\alpha}\geqslant\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda^{\beta}}|y|^{\frac{1}{1+\alpha}+\beta}\right]^{1+\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^{1+\beta(1+\alpha)}}|y|^{1+\beta(1+\alpha)},$$

или, положив

$$\frac{1}{\lambda^{1+\beta(1+\alpha)}}=\Lambda,\qquad \beta(1+\alpha)=\gamma>0,$$

получим

$$\varphi_2(y)\geqslant\frac{1}{\Lambda}|y|^{1+\gamma}\quad\text{при всех } y.\qquad(9)$$

Условие (9) вполне аналогично (7') и, как и в теореме 1, получим:

$$\varphi_{2k}(y) \geqslant \Lambda^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{|y|^\gamma}{\Lambda} \right]^{\frac{(1+\gamma)^k}{\gamma}};$$

поэтому при $|y| > \Lambda^{1/\gamma}$ $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{2k}(y) = \infty$, что противоречит (6).

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекают:

Следствие 1. Если в произвольной корреляции, удовлетворяющей лишь условию (1), линии регрессии — многочлены положительной степени, то их степень равна единице, т. е. корреляция прямолинейна.

В частности, не существует симметрической параболической корреляции, если порядок параболы больше 1.

Следствие 2. Если линии регрессии — алгебраические кривые, причем $\varphi(x)=$ м. о.$_x y$ имеет порядок $\delta > 0$, а $\psi(y)=$ м. о.$_y x$ имеет порядок $\delta_1 > 0$, то $\delta\delta_1 \leqslant 1$*.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
6 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, ДАН, **53**, № 9 (1946).

---

* Мы говорим, что кривая $y=\varphi(x)$ имеет порядок $\delta$, если $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|\varphi(x)|}{|x|^\delta} = c > 0$.