

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 539.12

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-338-351>

Поступила в редакцию 02.06.2023

Received 02.06.2023

О. П. Соловцова^{1,2}, В. И. Лашкевич¹, Л. П. Каптарь²¹Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,
Гомель, Республика Беларусь²Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОПРАВК
ПЯТОГО ПОРЯДКА К АНОМАЛЬНОМУ МАГНИТНОМУ МОМЕНТУ
ЛЕПТОНОВ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕЛЛИНА – БАРНСА**

Аннотация. Исследуется явный вид электромагнитных поправок пятого порядка по постоянной тонкой структуре α к аномальному магнитному моменту лептонов a_L ($L = e, \mu, \tau$) от диаграмм со вставками поляризационного оператора из лептонных петель. Подход основывается на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризационного оператора и преобразования Меллина – Барнса для пропагаторов массивных частиц. Получены явные аналитические выражения для поправок к a_L от поляризации вакуума четырьмя одинаковыми лептонными петлями. Найдены асимптотические разложения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов ($r = m_\ell / m_L$), $r \ll 1$ и $r \rightarrow \infty$. Полученные разложения сравниваются с соответствующими выражениями, приведенными в литературе.

Ключевые слова: аномальные магнитные моменты лептонов, квантово-электродинамические поправки высших порядков, преобразование Меллина – Барнса

Для цитирования. Соловцова, О. П. Аналитические расчеты электромагнитных поправок пятого порядка к аномальному магнитному моменту лептонов в представлении Меллина – Барнса / О. П. Соловцова, В. И. Лашкевич, Л. П. Каптарь // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 338–351. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-338-351>

Olga P. Solovtsova^{1,2}, Vasil I. Lashkevich¹, Leonid P. Kaptari²¹Gomel State Technical University named after P.O. Sukhoi, Gomel, Republic of Belarus²Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation**ANALYTICAL CALCULATIONS OF FIFTH-ORDER ELECTROMAGNETIC CORRECTIONS
TO THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT OF LEPTONS
WITHIN THE MELLIN-BARNES REPRESENTATION**

Abstract. We investigate the explicit, analytical expressions for the fifth-order electromagnetic corrections in the fine structure constant α to the anomalous magnetic moment of leptons a_L ($L = e, \mu, \tau$) from diagrams with insertions of the vacuum polarization operator consisting of pure lepton loops. Our approach is based on the consecutive application of dispersion relations for the polarization operator and the Mellin – Barnes transform for the propagators of massive particles. Exact analytical expressions for the corrections to a_L from vacuum polarization by four identical loops are obtained. Asymptotic expansions are found in the limit of both small and large values of the lepton mass ratio ($r = m_\ell / m_L$), $r \ll 1$ and $r \rightarrow \infty$. The resulting expansions are compared with the corresponding expressions given in the literature.

Keywords: anomalous magnetic moment of the leptons, higher-order quantum electromagnetic corrections, Mellin – Barnes transform

For citation. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Analytical calculations of fifth-order electromagnetic corrections to the anomalous magnetic moment of leptons within the Mellin – Barnes representation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 4, pp. 338–351 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-4-338-351>

Введение. Известно, что взаимодействие лептона (L) с фотонами приводит к сдвигу гиромагнитного отношения g_L от значения $g_0 = 2$, предсказанного теорией Дирака [1]. Величина сдвига характеризуется аномалией $a_L \equiv (g_L - 2) / 2 \neq 0$, которая хотя по величине и мала, но представляет собой большой научный интерес, поскольку экспериментальные значения a_L для электрона

и мюона получены с очень высокой точностью, тем самым открывая возможность для уникальной проверки Стандартной модели (СМ). На сегодняшний день наблюдается отличие на уровне 2-го и 4-го стандартных отклонений соответственно для a_e и a_μ между предсказаниями СМ и наиболее точными результатами измерений. Имеющееся преимущество в экспериментальной точности служит мощным стимулом для уточнения и проверки теоретических расчетов, поскольку надежно установленное рассогласование между теорией и экспериментом может указать на ограничение Стандартной модели и на проявление новой, неизвестной физики. Отметим, что помимо чисто электромагнитного взаимодействия вклады в аномальные магнитные моменты лептонов дают электрослабое и сильное взаимодействия (с возникновением виртуальных кварков или даже адронов). Также следует отметить, что аномальный магнитный момент мюона a_μ гораздо чувствительней, чем a_e , к вкладам этих взаимодействий и возможным вкладам за рамками СМ. Детальный и полный обзор по расчетам различных вкладов в a_L можно найти, например, в [2, 3], а текущие экспериментальные значения a_L для электрона и мюона – в [4–6].

Лидирующая поправка к аномальному магнитному моменту электрона, равная $a_e = \alpha / (2\pi)$, где $\alpha = e^2 / (4\pi) \approx 1/137$ – постоянная тонкой структуры, впервые была получена Дж. Швингером [7]. Аналитические расчеты радиационных поправок в следующем за лидирующим порядке ($\sim \alpha^2$), включающие 7 диаграмм, потребовали довольно сложных вычислений [8, 9]. В настоящее время, с учетом точности современных экспериментов, в теоретический анализ включаются радиационные поправки пятого порядка ($\sim \alpha^5$). Как правило, окончательные численные теоретические значения a_L находят с помощью специальных алгоритмов (см., напр., [10, 11]), позволяющих достичь очень высокой точности компьютерных вычислений. Выполнить такие расчеты непросто, и они требуют много компьютерного времени, при этом детальный анализ вкладов в a_L от различных механизмов затруднен. Поэтому ведется поиск подклассов фейнмановских диаграмм, вклады от которых в a_L , хотя бы в низших порядках теории возмущений, удавалось бы получить в аналитическом, замкнутом виде. Одним из таких подклассов являются диаграммы со вставками фотонного поляризационного оператора, состоящими только из лептонных петель – так называемые диаграммы «пузырькового» типа. Предыдущие расчеты такого рода диаграмм показали, что поправки к a_L могут быть получены в явном виде до порядка α^3 (или шестого порядка по электрическому заряду e) [12, 13]. В [14], основываясь на представлении Меллина – Барнса, решалась задача о получении аналитических выражений для поправок к a_μ в виде разложений по отношению масс лептонов до порядка α^3 , а в [15] – вплоть до α^5 . Недавно в [16] такой подход был обобщен для нахождения явных выражений поправок к a_L вплоть до α^4 (восьмого порядка по e) для любых лептонов и во всем интервале отношения масс лептонов, $0 < m_\ell / m_L < \infty$, где m_ℓ соответствует массе лептонов из поляризационного оператора, а m_L – массе рассматриваемого лептона L . Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие подхода, использовавшегося в [14–16], и посвящена нахождению явного выражения для поправок порядка α^5 от диаграмм поляризации вакуума четырьмя петлями, сформированными одинаковыми лептонами $\ell \neq L$. До сих пор исследования поправок порядка α^5 проводились лишь в пределе малых отношений $m_\ell / m_L \ll 1$. В данной работе получены точные аналитические выражения для указанного типа поправок, представлены численные расчеты при отношении масс лептонов во всем интервале значений $0 < m_\ell / m_L < \infty$ и проведено сравнение с известными асимптотическими разложениями.

Основной формализм. Подход, используемый нами для вычисления радиационных поправок к a_L от диаграмм со вставками поляризационных операторов, содержащих $n = p + j$ петель (j обозначает число замкнутых петель из лептонов типа ℓ , отличных от рассматриваемого лептона, $\ell \neq L$, а p – это число петель из лептонов типа L), основывается на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризованного оператора и преобразования Меллина – Барнса для пропагаторов массивных частиц.

Общий вид диаграмм, дающих вклад в $a_L(p, j)$ и содержащих произвольное число заткнутых петель, изображен на рис. 1, *a*. Легко показать (см., напр., [15–17]), что вклад в a_L , обусловленный такими диаграммами, определяется вкладом от диаграмм с обменом лишь одним, но массивным фотоном, как проиллюстрировано на рис. 1, *b*. Действительно, прямой расчет диаграммы на рис. 1, *a* дает

$$\begin{aligned}
 \Gamma_\mu(p_1, p_2) &= -ie \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\alpha \frac{(\widehat{p}_2 - \widehat{k} + m_L) \gamma_\mu (\widehat{p}_1 - \widehat{k} + m_L)}{(k^2 - 2p_2k)(k^2 - 2p_1k)} \gamma_\alpha \frac{\widetilde{\Pi}(k^2)}{k^2} = \\
 &= -ie \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{dt}{t} \frac{1}{\pi} \text{Im} \widetilde{\Pi}(t) \int d^4k \gamma_\alpha \frac{(\widehat{p}_2 - \widehat{k} + m_L) \gamma_\mu (\widehat{p}_1 - \widehat{k} + m_L)}{(k^2 - 2p_2k)(k^2 - 2p_1k)} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} \text{Im} \widetilde{\Pi}(t) \left[-ie \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\alpha \frac{(\widehat{p}_2 - \widehat{k} + m_L) \gamma_\mu (\widehat{p}_1 - \widehat{k} + m_L)}{(k^2 - 2p_2k)(k^2 - 2p_1k)} \gamma_\alpha \frac{1}{k^2 - t} \right], \tag{1}
 \end{aligned}$$

где последнее уравнение получено после применения к поляризованному оператору $-\widetilde{\Pi}(k^2)/k^2$ соответствующих дисперсионных соотношений. Легко заметить, что выражение в квадратных скобках в (1) не что иное, как вершинная функция $\Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2, t)$, определяемая диаграммой, приведенной на рис. 1, *b*, с обменом лишь одним массивным фотоном с массой $m_\gamma^2 = t$, т. е.

$$\Gamma_\mu(p_1, p_2) = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} \text{Im} \widetilde{\Pi}(t) \Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2, t). \tag{2}$$

Следовательно, аномальный магнитный момент лептона с вершиной $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ (см. рис. 1, *a*) целиком определяется магнитным моментом лептона с вершиной $\Gamma_\mu^{(2)}(p_1, p_2, t)$ (см. рис. 1, *b*), явный вид которой хорошо известен в литературе [18, 19], это позволяет записать a_L (подробности изложены, напр., в [16]) в виде

$$a_L = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt}{t} \text{Im} \widetilde{\Pi}(t) \frac{\alpha}{\pi} \int dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)t/m_L^2} = -\frac{\alpha}{\pi} \int dx (1-x) \widetilde{\Pi} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right). \tag{3}$$

В принципе, уравнение (3) полностью определяет аномальный магнитный момент лептонов от рассматриваемого подкласса диаграмм и может быть непосредственно применено для прямого численного расчета $a_L(p, j)$. Однако, как отмечалось выше, цель настоящей работы состоит в нахождении аналитических выражений для поправок к a_L как можно более высокого порядка по постоянной тонкой структуры α , чтобы анализировать эти поправки и вычислять их с любой, наперед заданной точностью.

Напомним, что полный поляризованный оператор, соответствующий рис. 1, *a*, может быть записан в виде

$$\widetilde{\Pi}(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi^2(k^2) + \Pi^3(k^2) - \dots \tag{4}$$

С учетом того, что каждый член в (4) есть сумма операторов лептонов типа L и ℓ , выражение для поправок от диаграмм с n лептонными петлями можно расписать в явном виде как произведение поляризованных операторов L и ℓ , каждый в соответствующей степени. Применение

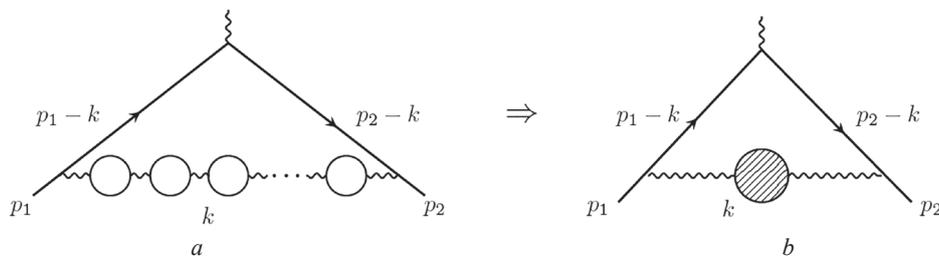


Рис. 1. Радиационные поправки к лептонной электромагнитной вершине, обусловленные вставками поляризованных операторов (*a*), и эквивалентная диаграмма с обменом одним массивным фотоном (*b*)

Fig. 1. Radiative corrections to the lepton electromagnetic vertex due to insertions of polarization operators (*a*) and an equivalent diagram with the exchange of one massive photon (*b*)

далее последовательно для части с лептонами ℓ сначала дисперсионных соотношений, а затем преобразования Меллина – Барнса [20–22], приводит к окончательному выражению для радиационных поправок от диаграмм с n замкнутыми петлями в случае, когда в поляризованном операторе j петель состоят исключительно из лептонов типа ℓ , а p петель состоят из лептонов типа L , в виде

$$a_L(p, j) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{2\pi i} F_{(p,j)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{4m_\ell^2}{m_L^2} \right)^{-s} \Gamma(s)\Gamma(1-s) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(s) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(s), \quad (5)$$

где $F_{(p,j)} = (-1)^{p+j+1} C_{p+j}^p$ и C_{p+j}^p обозначают биномиальные коэффициенты, а c – любое число из интервала $\gamma < \text{Re } s < \beta$, в котором подынтегральная функция (5) непрерывна. В рассматриваемом случае $0 < c < 1$. Меллиновские моменты $\Omega_p(s)$ и $R_j(s)$ определены как

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(s) = \int_0^1 dx x^{2s} (1-x)^{1-s} \left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{4m_\ell^2}{t} \right)^s \frac{1}{\pi} \text{Im}[\Pi^{(\ell)}(t)]^j. \quad (7)$$

Как видно из выражений (5)–(7), для вычисления поправок $a_L(p, j)$ достаточно вычислить отдельно $\left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p$ и $[\text{Im}\Pi^{(\ell)}(t)]^j$. Явный вид операторов $\Pi^{(L)}$ и $\Pi^{(\ell)}$ в (6) и (7) хорошо известен [23]:

$$\text{Re } \Pi^{(L,\ell)}(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \left[\frac{8}{9} - \frac{\delta^2}{3} + \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{6} \right) \ln \frac{|1-\delta|}{1+\delta} \right], \quad (8)$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{(L,\ell)}(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \delta^2 \right) \theta(t - 4m_{(L,\ell)}^2), \quad (9)$$

где $\delta = \sqrt{1 - 4m_{(L,\ell)}^2/t}$. Важно отметить, что из-за наличия θ -функции в (9) операторы $\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right)$ являются чисто вещественными, не зависящими от лептонных масс, и принимают вид

$$\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{5}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{4}{3x^2} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} \right) \ln(1-x) \right]. \quad (10)$$

Простой заменой переменной $t = \frac{4m_\ell^2}{\xi}$ в (7) легко показать, что и $R_j(s)$ также не зависит от масс лептонов. Таким образом, единственная зависимость в a_L от лептонных масс входит только через отношения масс внутренних и внешних лептонов:

$$r = \frac{m_\ell}{m_L}. \quad (11)$$

Соответственно, в литературе общепринято классифицировать электродинамические вклады в аномальный магнитный момент a_L в зависимости от этого отношения (см., напр., [2, 3]):

$$a_L = A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) + A_2 \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) + A_3 \left(\frac{m_{\ell_1}}{m_L}, \frac{m_{\ell_2}}{m_L} \right). \quad (12)$$

Первое слагаемое A_1 – это универсальный вклад, не зависящий от масс лептонов ($r = 1$). Каждое из слагаемых в сумме (12) может быть представлено в виде разложения по постоянной тонкой структуре α :

$$A_1 = A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^1 + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots, \quad (13)$$

$$A_2(m_\ell / m_L) = A_2^{(4)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{(6)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{(8)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{(10)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (14)$$

$$A_3(r_1, r_2) = A_3^{(6)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_3^{(8)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_3^{(10)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (15)$$

где $r_1 = m_{\ell_1} / m_L$, $r_2 = m_{\ell_2} / m_L$, а $m_{\ell_{1,2}}$ обозначают массы лептонов двух разных типов, отличных от внешнего лептона L . Коэффициенты $A_1^{2(n+1)}$ в (13) соответствуют только диаграммам, в которых содержатся n лептонных петель с лептонами того же типа, что и внешний лептон, а также диаграммами, содержащими лептонные петли и виртуальные фотоны. Коэффициент $A_1^{(2)} = 1/2$, определяющий лидирующую поправку, – это вышеупомянутый результат Швингера [7]. Следует отметить, что известны точные аналитические выражения для коэффициентов $A_1^{(4)}$ и $A_1^{(6)}$ (см., напр., [2]). В случае, если диаграммы содержат только лептонные петли, то точные выражения для коэффициентов $A_1^{2(n+1)}$ известны вплоть до $n = 13$ [24]. Интересно отметить, что коэффициенты $A_1^{2(n+1)}$ до $n = 7$ падают по величине, а потом растут, причем при $n \gg 1$ они растут факториально (см. [17, 25]). При поляризации вакуума только четырьмя лептонными петлями соответствующий коэффициент имеет вид

$$A_1^{(10)} = -\frac{3689383}{656100} - \frac{21928 \pi^4}{1403325} - \frac{128 \zeta(3)}{675} + \frac{64 \zeta(5)}{9} \simeq 4,709057160 \cdot 10^{-4}. \quad (16)$$

Коэффициенты разложения в (15) для вклада $A_3(r_1, r_2)$ в данной работе не рассматриваются, поскольку для них в применяемом подходе возникает более сложное, чем (5), выражение, содержащее двойной интеграл, а это требует отдельного рассмотрения.

Коэффициенты разложения $A_2^{2(n+1)}(r)$ в (14) для вклада $A_2(m_\ell / m_L)$ от диаграмм поляризации вакуума лептонными петлями ($\ell \neq L$) в разных порядках разложения по постоянной тонкой структуры α полностью определяются формулами (5)–(10). В настоящей работе, опираясь на эти формулы, мы ставим задачу получить явные аналитические выражения для коэффициента десятого порядка $A_2^{(10)}(r)$, ограничиваясь при этом случаем, когда все лептоны ℓ в петлях идентичны и отличны от внешнего лептона L ($\ell \neq L$), соответствующая диаграмма приведена на рис. 2.

Расчет диаграммы на рисунке 2. Для приведенной на рис. 2. диаграммы входящий в выражение (5) множитель $F_{(p,j)} = -1$, поскольку $p = 0, j = 4$. Тогда определяемые выражениями (6) и (7) меллиновские моменты $\Omega_0(s)$ и $R_4(s)$ принимают вид

$$\Omega_0(s) = \int_0^1 dx x^{2s} (1-x)^{1-s} = \frac{\Gamma(2-s)\Gamma(1+2s)}{\Gamma(3+s)}, \quad (17)$$

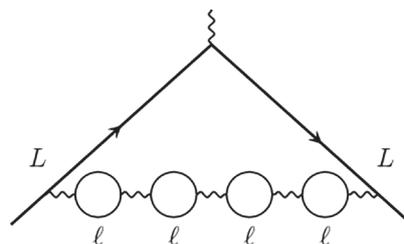


Рис. 2. Диаграмма поляризации вакуума четырьмя одинаковыми лептонными петлями, образованными лептонами ℓ , отличными от внешнего лептона L

Fig. 2. The vacuum polarization diagram with insertion of four lepton loops formed by leptons ℓ different from the external lepton L

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 R_4(s) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\frac{4m_l^2}{t}\right)^s \frac{4}{\pi} \left\{ [\operatorname{Re}\Pi^{(\ell)}(t)]^3 \operatorname{Im}\Pi^{(\ell)}(t) - \operatorname{Re}\Pi^{(\ell)}(t) [\operatorname{Im}\Pi^{(\ell)}(t)]^3 \right\}. \quad (18)$$

Находя по формуле (18) с использованием (8) и (9) явный вид $R_4(s)$ и, далее, подставляя $\Omega_0(s)$ и $R_4(s)$ в (5), приходим к окончательному выражению для вклада от диаграммы поляризации вакуума с четырьмя лептонными петлями (см. рис. 2) в виде

$$a_L^{4\ell}(r) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r^{-2s} F(s) ds, \quad (19)$$

где подынтегральная функция $F(s)$ равна

$$F(s) = \left\{ \frac{Z_1(s)}{729} - (1+s) Z_2(s) \left[\frac{81\pi^2}{729} - \frac{2}{3} \Psi^{(1)}(s) \right] \right\} \frac{4\pi^2(1-s)}{Y(s) \sin^2(\pi s)}, \quad (20)$$

а $\Psi^{(1)}(s)$ есть полигамма-функция первого порядка. В уравнении (20) для удобства введены следующие обозначения:

$$Z_1(s) = 1259712 + 955332s - 4110912s^2 - 6558755s^3 - 1384529s^4 + 3898617s^5 + 3867513s^6 + 1653510s^7 + 373944s^8 + 43520s^9 + 2048s^{10}, \quad (21)$$

$$Z_2(s) = -8400 - 26340s - 22144s^2 + 1641s^3 + 11729s^4 + 6894s^5 + 1835s^6 + 237s^7 + 12s^8, \quad (22)$$

$$Y(s) = s(s+1)^2(s+2)^2(3+s)(4+s)(5+s)(6+s)(1+2s)(3+2s)(5+2s)(7+2s). \quad (23)$$

Из выражений (20)–(23) явно видно, что подынтегральная функция $F(s)$ в (19) сингулярна в комплексной плоскости переменной s с полюсными сингулярностями различной кратности, обусловленными функциями $Y(s)$, $\Psi^{(1)}(s)$ и $1/\sin^2(\pi s)$. Далее, интеграл (19) считается по теореме Коши о вычетах, замыкая контур интегрирования поочередно в правую ($r > 1$) и левую ($r < 1$) полуплоскость.

Случай $r > 1$. В правой полуплоскости подынтегральная функция $F(s)$ имеет полюсы второго порядка при всех положительных целых значениях $s = n > 1$ ($n = 2, 3, \dots$), кроме точки $n = 1$, в которой полюс первого порядка, однако вычет $F(s)$ в точке $s = 1$ равен нулю. Удобно в правой полуплоскости для $n \geq 2$ представить подынтегральную функцию $r^{-2s} F(s)$ в виде

$$r^{-2s} F(s) = \frac{f(s,r)}{\sin^2(\pi s)}, \quad (24)$$

где $f(s,r)$ регулярна в этой области и однозначно определяется выражениями (20)–(23). Тогда прямое вычисление вычетов (второго) порядка по стандартным правилам

$$\operatorname{Res} \left[\frac{f(s,r)}{\sin^2(\pi s)} \right]_{s=n} = \lim_{s \rightarrow n} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{f(s,r)(s-n)^2}{\sin^2(\pi s)} \right] = \frac{1}{\pi^2} \lim_{s \rightarrow n} \left[\frac{\partial}{\partial s} f(s,r) \right]$$

с последующим их суммированием приводит к следующему выражению для коэффициента

$$A_2^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r), \text{ который определяет вклад пятого порядка, } a_L^{4\ell}(r) = A_2^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^5 :$$

$$A_2^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r > 1) = D_0(r) + 2D_1(r) \ln(r) + D_2(r) \left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{r}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{r}\right) \ln(r) \right] - \left(\frac{8r^2}{75} + 5r^4 + \frac{2\pi^2 r^4}{3} \right) \times \\ \times \frac{16}{9} \left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{r^2}\right) \ln(r) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] + \Sigma_1(r), \quad (25)$$

где $\operatorname{Li}_n(x)$ обозначает полилогарифмическую функцию порядка n от аргумента x , а полиномы $D_{(0-2)}(r)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_0(r) = & \frac{14463825527}{11252115000} - \frac{143175013r^2}{14033250} + \frac{680597537r^4}{63149625} + \frac{97213348r^6}{63149625} + \\
& + \frac{797842r^8}{2338875} + \frac{42952r^{10}}{1002375} - \frac{\pi^2}{2} r \left(-\frac{18203}{31185} - \frac{28010r^2}{5103} + \frac{5957r^4}{2025} + \frac{12916r^6}{70875} \right) - \\
& - \pi^2 \left(\frac{57419}{255150} - \frac{2878}{2679075r^2} - \frac{1251149r^2}{1559250} - \frac{249589r^4}{841995} - \frac{40591r^6}{336798} - \frac{3632r^8}{93555} - \frac{64r^{10}}{13365} \right) + \\
& + 2r \left[\frac{18203}{31185} + \frac{28010r^2}{5103} - \frac{5957r^4}{2025} - \frac{12916r^6}{70875} - \pi^2 \left(\frac{18203}{748440} + \frac{2801r^2}{13608} - \frac{23r^4}{216} - \frac{7r^6}{1080} \right) \right] \times \\
& \times \left[\operatorname{Li}_2 \left(-\frac{r-1}{r+1} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{r-1}{r+1} \right) \right] + \frac{\pi^4}{2} r \left(\frac{18203}{748440} + \frac{2801r^2}{13608} - \frac{23r^4}{216} - \frac{7r^6}{1080} \right), \\
D_1(r) = & \frac{9239297}{26790750} + \frac{15360524r^2}{5011875} - \frac{109392281r^4}{21049875} - \frac{26671558r^6}{21049875} - \frac{2468692r^8}{7016625} - \\
& - \frac{42952r^{10}}{1002375} + \pi^2 \left(\frac{25}{243} - \frac{1185953r^2}{1871100} - \frac{4624r^4}{40095} - \frac{26501r^6}{224532} - \frac{416r^8}{10395} - \frac{64r^{10}}{13365} \right), \\
D_2(r) = & -\frac{8}{175} - \frac{13664r^2}{10125} - \frac{1274r^4}{729} + \frac{1568r^6}{1215} - \frac{410r^8}{567} - \frac{42152r^{10}}{127575} - \\
& - \frac{42952r^{12}}{1002375} + \pi^2 \left(-\frac{2}{81} + \frac{8r^2}{27} - \frac{34r^4}{81} + \frac{64r^6}{405} - \frac{16r^8}{189} - \frac{64r^{10}}{1701} - \frac{64r^{12}}{13365} \right).
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое $\Sigma_1(r)$ в выражении (25) есть сумма, которая имеет вид

$$\Sigma_1(r) = \frac{8}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{C_1(n)}{Y(n)} \psi_n^{(1)} + (n^2 - 1) C_2(n) (2\psi_n^{(1)} \ln(r) - \psi_n^{(2)}) \right] \frac{r^{-2n}}{Y(n)}, \quad (26)$$

где $\psi_n^{(1,2)}$ обозначает полигамма-функцию (1-го, 2-го порядков) от целого аргумента n , полином $C_1(n)$ равен

$$\begin{aligned}
C_1(n) = & (n+1)^2(n+2)(635040000 + 7687008000n + 36734547600n^2 + 93125888040n^3 + \\
& + 135651027372n^4 + 104915891978n^5 + 10006706560n^6 - 69851951805n^7 - 83164962406n^8 - \\
& - 51439049641n^9 - 18649902420n^{10} - 2892341259n^{11} + 812142446n^{12} + 656337939n^{13} + \\
& + 212614912n^{14} + 42833116n^{15} + 5711184n^{16} + 493456n^{17} + 25152n^{18} + 576n^{19}), \quad (27)
\end{aligned}$$

а полином $C_2(n)$ находится по формуле (22), в которой в $Z_2(s)$ переменная s заменяется на n , $C_2(n) = Z_2(s = n)$, аналогично, из выражения (23), подставляя $s = n$, находится $Y(n)$.

С л у ч а й $r < 1$. Вычисление интеграла (19) в области $r < 1$ намного сложнее по сравнению со случаем $r > 1$. Это обусловлено наличием дополнительных нулей (первого порядка) у функции $Y(s)$, определяемой формулой (23) при полуцелых значениях $s = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ и нулей при целых отрицательных n , где $0 \leq n \leq 6$. Кроме того, при отрицательном аргументе полигамма-функция $\psi^{(1)}(s)$ также имеет полюсы при целых $s = -n$. Это явно демонстрирует соотношение

$$\psi^{(1)}(s) = -\psi^{(1)}(-s) + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi s)}, \quad (28)$$

содержащее функцию $\psi^{(1)}(-s)$, не имеющую особенностей в левой полуплоскости.

Удобно воспользоваться (28) и представить подынтегральную функцию $r^{-2s}F(s)$ в (19) в виде

$$r^{-2s}F(s) = \frac{1}{Y(s)} \frac{f_1(s, r)}{\sin^4(\pi s)} + \frac{1}{Y(s)} \frac{f_2(s, r)}{\sin^2(\pi s)}, \quad (29)$$

где функция $f_1(s, r)$ регулярна в левой полуплоскости, а $f_2(s, r)$ сингулярна из-за наличия слагаемого $1/s^2$ в соотношении (28) в точке $s = 0$. В силу громоздкости выражений для соответствующих производных высокого порядка по s , все операции проводились нами на компьютере с использованием пакета символьной манипуляции Wolfram Mathematica. Результат вычислений следующий:

$$A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r < 1) = P_0(r) + 2P_1(r)\ln(r) + 4P_2(r)\ln^2(r) + 8P_3(r)\ln^3(r) + \frac{4}{3}K_1(r)\ln^4(r) - \frac{128}{135}r^4\ln^5(r) + 2K_3\left[\Phi\left(r^2, 4, \frac{1}{2}\right) - 2\Phi\left(r^2, 3, \frac{1}{2}\right)\ln(r) + 2\Phi\left(r^2, 2, \frac{1}{2}\right)\ln^2(r)\right] + \Sigma_2(r), \quad (30)$$

где $\Phi(r^2, n, 1/2)$ – это функции Лерха, которая связана с полилогарифмами как

$$\Phi(r^2, n, 1/2) = 2^{n-1} \frac{1}{r} [\text{Li}_2(r) - \text{Li}_2(-r)],$$

также введены обозначения

$$P_0(r) = \frac{64613}{26244} - \frac{145231r^2}{17325} + \frac{265354583r^4}{7016625} + \frac{5155111r^6}{1002375} + \frac{1644584209r^8}{261954000} + \frac{262864711931r^{10}}{445583754000} - \frac{38750851857953r^{12}}{70020304200000} - \pi^2 K_1(r) \left(\text{Li}_2(r^2) - \frac{\pi^2}{5} \right) + \frac{\pi^2}{2r} \left(K_4(r) - \frac{\pi^2}{3} K_3(r) \right) + \pi^2 \left(\frac{317}{1458} - \frac{380911r^2}{173250} + \frac{1224743r^4}{841995} - \frac{1473151r^6}{1559250} - \frac{9577847r^8}{61122600} + \frac{283177187r^{10}}{3713197950} + \frac{55905529021r^{12}}{1283705577000} \right) - \frac{2}{r} \left(K_4(r) + \pi^2 K_3(r) \right) \left[\text{Li}_2\left(\frac{1-r}{1+r}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{1-r}{1+r}\right) \right] - \left(\frac{100}{81} + \frac{128r^2}{675} + \frac{64r^4}{9} - \frac{32\pi^2 r^4}{9} \right) \text{Li}_3(r^2) - K_5(r) \text{Li}_2(1-r^2) + \left(6K_2(r) - \frac{128r^2}{675} - \frac{64\pi^2 r^4}{27} \right) \zeta(3) - 2 \left(K_1(r) + \frac{2}{9} \right) \text{Li}_4(r^2) + \frac{128}{9} r^4 \left(\text{Li}_5(r^4) - \zeta(5) \right),$$

$$P_1(r) = \frac{8609}{4374} - \frac{2190631r^2}{280665} - \frac{139188328r^4}{7016625} - \frac{1590044r^6}{7016625} - \frac{27882949r^8}{9355500} - \frac{1090421197r^{10}}{1768189500} + \frac{671218651r^{12}}{5051970000} + \pi^2 \left(\frac{50}{243} - \frac{50399r^2}{41580} + \frac{6431r^4}{13365} + \frac{20003r^6}{1871100} + \frac{5539r^8}{48510} - \frac{16846r^{10}}{5893965} - \frac{2119877r^{12}}{92619450} \right) + \left(\frac{50}{81} + \frac{64r^2}{675} + \frac{32r^4}{9} - \frac{16\pi^2 r^4}{9} \right) \text{Li}_2(r^2) - \pi^2 K_1(r) \ln(1-r^2) + 2K_1(r) \left(\text{Li}_3(r^2) + 2\zeta(3) \right) + \frac{4}{27} \text{Li}_3(r^2) - \frac{32r^4}{3} \text{Li}_4(r^2),$$

$$P_2(r) = \frac{317}{486} - \frac{247663r^2}{62370} + \frac{2139227r^4}{561330} - \frac{40591r^6}{112266} - \frac{3632r^8}{31185} - \frac{64r^{10}}{4455} + K_1(r) \left(\text{Li}_2(r^2) - \frac{\pi^2}{3} \right) + \frac{32}{9} r^4 \left(\text{Li}_3(r^2) - \zeta(3) \right),$$

$$P_3(r) = \frac{25}{243} - \frac{231277r^2}{374220} - \frac{4624r^4}{40095} - \frac{26501r^6}{224532} - \frac{416r^8}{10395} - \frac{64r^{10}}{13365} - \frac{16\pi^2 r^4}{81} - \frac{16}{27} r^4 \text{Li}_2(r^2) - \frac{1}{3} K_1(r) \ln(1-r^2) - \frac{K_3(r)}{3r} [\ln(1+r) - \ln(1-r)],$$

где $\zeta(x)$ обозначает дзета-функцию Римана от аргумента x . Для краткости записи в выражениях для $P_{(0-3)}(r)$ используются следующие полиномы:

$$K_1(r) = \frac{2}{27} - \frac{6r^2}{9} + \frac{34r^4}{27} - \frac{64r^6}{135} + \frac{16r^8}{63} + \frac{64r^{10}}{567} - \frac{64r^{12}}{4455},$$

$$K_2(r) = \frac{50}{243} - \frac{104r^2}{81} - \frac{134r^4}{81} - \frac{4432r^6}{6075} - \frac{1033r^8}{2205} - \frac{12332r^{10}}{535815} + \frac{2119877r^{12}}{46309725},$$

$$K_3(r) = \frac{18203r^2}{249480} + \frac{2801r^4}{4536} - \frac{23r^6}{6075} - \frac{7r^8}{360},$$

$$K_4(r) = -\frac{2801r^4}{567} + \frac{230r^6}{81} + \frac{1813r^8}{10125},$$

$$K_5(r) = -\frac{317}{243} + \frac{31664r^2}{10125} + \frac{167r^4}{729} - \frac{32r^6}{27} + \frac{56r^8}{81} + \frac{1640r^{10}}{5103} + \frac{3832r^{12}}{91125}.$$

Наконец, выражение для суммы $\Sigma_2(r)$ в (30) имеет вид

$$\Sigma_2(r) = \frac{8}{3} \sum_{n=7}^{\infty} \left[\frac{C_1(-n)}{Y(-n)} \psi_n^{(1)} + (n^2 - 1)C_2(-n) \left(2\psi_n^{(1)} \ln(r) + \psi_n^{(2)} \right) \right] \frac{r^{2n}}{Y(-n)}, \quad (31)$$

где все обозначения такие же, как в сумме $\Sigma_1(r)$, определяемой формулой (26), с учетом замены $n \rightarrow -n$ в полиномах C_1, C_2 и Y .

Численные результаты. Приведенные выше выражения (25)–(31) определяют в явном виде точные формулы для вычисления коэффициента $A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ от диаграммы поляризации вакуума четырьмя петлями, сформированными одинаковыми лептонами $\ell \neq L$. Несмотря на громоздкий вид полученных выражений, они позволяют легко провести численные расчеты с любой наперед заданной точностью. Отметим, что требуемая на сегодняшний день точность в численных значениях a_L связана с точностью экспериментальных значений a_L и точностью входящих в формулы физических величин α и m_ℓ / m_L (соответствующие численные значения с ошибками можно найти в [26]).

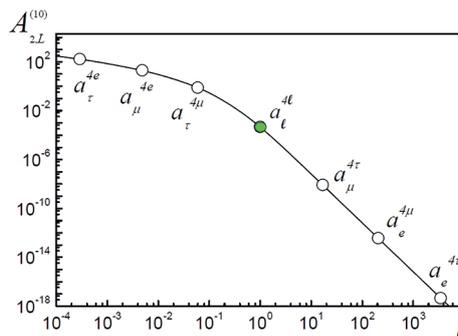


Рис. 3. Поведение коэффициента $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ в поправке пятого порядка $a_L^{4\ell}$, формула (19), в зависимости от отношения масс лептонов $r = m_\ell / m_L$. Сплошная линия: расчет по формуле (25) при $r < 1$ и по формуле (30) при $r > 1$. Кружочкам соответствуют значения $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}$ при реальных физических массах m_ℓ и m_L лептонов, каким именно комбинациям – на это указывает рядом стоящее $a_L^{4\ell}$. На значение универсального коэффициента ($r = 1$), соответствующее выражению (16), указывает рядом стоящее $a_L^{4\ell}$

Fig. 3. The behavior of the coefficient $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ for the fifth-order correction $a_L^{4\ell}$, eq. (19), depending on the ratio of lepton masses $r = m_\ell / m_L$. The solid line is the results of calculations by exact formulae (25) at $r < 1$ and eq. (30) at $r > 1$. The circles correspond to the values $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}$ for real physical lepton masses m_ℓ and m_L and leptons, the type of combination is indicated by the nearby $a_L^{4\ell}$. The value of the universal coefficient ($r = 1$), corresponding to expression (16), is indicated by the nearby $a_L^{4\ell}$

На рис. 3 представлены результаты численного расчета коэффициента $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ в широком диапазоне значений отношения масс лептонов $r = m_\ell / m_L$ (сплошная кривая). Шесть кружочков на кривой указывают на значения $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ для реальных физических лептонов, а на то, какой комбинации из внутренних ℓ и внешних L лептонов соответствуют величины, – указывает рядом стоящее $a_L^{4\ell}$. На значение универсального коэффициента ($r = 1$), соответствующее выражению (16), указывает рядом стоящее $a_\ell^{4\ell}$. Рис. 3 наглядно демонстрирует различие в поведении $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ при больших и малых значениях r , а также что вклады от диаграмм при $r > 1$ сильно подавлены (от 8 до 20 порядков величины) по сравнению со значениями при $r < 1$.

Дополнительной проверкой полученных аналитических выражений (25) и (30) может служить численный расчет $A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r)$ в точке $r = 1$, поскольку в этой точке значение $A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r)$, как при расчете по формуле (25), так и по формуле (30), должно давать численное значение универсального коэффициента $A_1^{(10)}$ (см. формулу (16)). Определив относительную точность как обычно, в нашем случае $\varepsilon = |A_1^{(10)} - A_2^{(10),\ell\ell\ell}(r=1)| / A_1^{(10)}$, легко убедиться, что при увеличении точности вычисления сумм (26) и (31) в выражениях (25) и (30) соответственно относительная точность ε быстро стремится к нулю, что убеждает в правильности (25) и (30).

Асимптотические разложения. Несмотря на то, что выражения (25)–(31) выглядят довольно громоздко, провести вычисления на компьютере по ним не составляет труда. Это может быть, например, востребовано с улучшением точности экспериментальных значений физических величин (a_L, α и m_ℓ / m_L).

Для качественных оценок можно получить и более простые выражения, чем (25)–(31). Исследуем поведение $A_2^{(10)}(r)$ при больших значениях отношения масс $r \gg 1$ и вблизи $r \rightarrow 0$. Отметим, что разложения для $A_2^{(10)}(r)$ в предположении малых $r \ll 1$ имеются в литературе. Так, в [27] соответствующее разложение было представлено до порядка $O(r^2 \ln r)$, а в [15] – до $O(r^5)$.

При $r \gg 1$ из формулы (25) следует разложение

$$A_2^{(10)}(r \gg 1) = \left(-\frac{369904}{88409475} + \frac{4402}{109147} \zeta(3) \right) \frac{1}{r^4} - \left(\frac{598587203}{82751268600} - \frac{71960}{127702575} \zeta(3) \right) \frac{1}{r^6} + O\left(\frac{1}{r^8}\right). \quad (32)$$

Для случая $r \ll 1$ из формулы (30) получаем

$$\begin{aligned} A_2^{(10)}(r \ll 1) \approx & \frac{8}{81} \ln^4(r) + \frac{200}{243} \ln^3(r) + \frac{4}{3} \left(\frac{317}{162} + \frac{2}{27} \pi^2 \right) \ln^2(r) + 2 \left(\frac{8609}{4374} + \frac{50}{243} \pi^2 + \frac{8}{27} \zeta(3) \right) \ln(r) + \\ & + \frac{64613}{26244} + \frac{317}{729} \pi^2 + \frac{2}{135} \pi^4 + \frac{100}{81} \zeta(3) - \frac{18203}{374220} \pi^4 r - \frac{2801}{6804} \pi^4 r^3 + \left[-\frac{32}{27} \ln^4(r) - \frac{416}{81} \ln^3(r) - \right. \\ & - \frac{32}{27} \left(\frac{38}{3} + \pi^2 \right) \ln^2(r) - \frac{8}{9} \left(\frac{1231}{81} + \frac{26}{9} \pi^2 + 8\zeta(3) \right) \ln(r) - \frac{55766}{6075} - \frac{608}{243} \pi^2 - \frac{8}{45} \pi^4 - \frac{592}{75} \zeta(3) \left. \right] r^2 + \\ & + \left[-\frac{128}{135} \ln^5(r) + \frac{136}{81} \ln^4(r) - \frac{8}{81} (67 + 16\pi^2) \ln^3(r) + \frac{4}{9} \left(\frac{5237}{81} + \frac{34}{9} \pi^2 - 32\zeta(3) \right) \ln^2(r) - \right. \\ & - \frac{2}{9} \left(\frac{52153}{243} + \frac{134}{9} \pi^2 + \frac{16}{5} \pi^4 - \frac{136}{3} \zeta(3) \right) \ln(r) + \frac{1103423}{26244} + \frac{10474}{2187} \pi^2 + \frac{34}{135} \pi^4 - \\ & \left. - \frac{268}{27} \zeta(3) - \frac{61}{27} \pi^2 \zeta(3) - \frac{128}{9} \zeta(5) \right] r^4 + O(r^5). \quad (33) \end{aligned}$$

Первые две строки этого разложения полностью согласуются с приведенным в [27] выражением, точность которого, однако, невелика $O(r^2 \ln r)$. Внимательное сравнение (33) с его аналогом в [15] указывает на совпадение этих выражений, за исключением двух слагаемых, а именно:

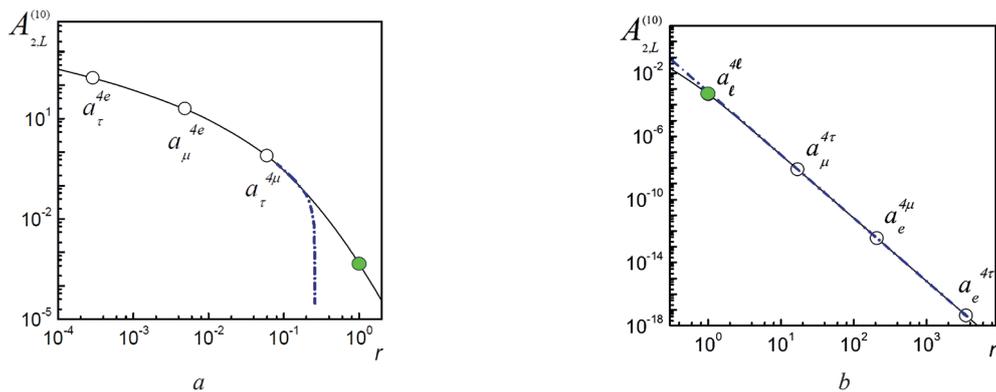


Рис. 4. Сравнение асимптотических разложений с точными расчетами $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r)$. Сплошная линия – точный результат, штрихпунктирные линии – разложение (33) при $r \ll 1$ (a) и (32) при $r \gg 1$ (b)

Fig. 4. The comparison of the results for the asymptotic expansions with the exact calculations of the coefficient $A_{2,L}^{(10),\ell\ell\ell\ell}(r)$. The solid curve is the exact result, the dashed-dotted lines are the asymptotics for $r \ll 1$, eq. (33), (a) and for $r \gg 1$, eq. (32) (b)

при слагаемом $-\frac{32}{27}r^2 \ln^4(r)$ отличаются знаки, а фактор $-\frac{61}{27}\pi^2\zeta(3)r^4$ в [15] выглядит как $-\frac{64}{27}\pi^2\zeta(3)r^4$. Видимо, в [15] имеются опечатки.

Сравним численные значения, получаемые из разложений (32) и (33), с расчетом, соответственно, по точным формулам (25) и (30) и определим области применимости разложений.

На рис. 4 приведено сравнение точных расчетов с результатами, даваемыми разложениями (33) при малых $r \rightarrow 0$ (рис. 4, a) и (32) при больших $r \rightarrow \infty$ (рис. 4, b). Как видно из рис. 4, a, расчеты по приближенной формуле (33) практически совпадают с точными в интервале $0 < r < 0,2$, в котором лежат и значения коэффициента $A_2^{(10)}(r)$, определяющие поправки a_τ^{4e} , a_μ^{4e} и $a_\tau^{4\mu}$. Рис. 4, b также демонстрирует хорошее согласие между точным расчетом и вычисленными по формуле (32) для $2 < r < \infty$. Таким образом, разложения (32) и (33) вполне могут быть использованы для качественного анализа поправок к аномальному магнитному моменту любого лептона (e, μ и τ) с любыми лептонными вставками.

Закключение. В данной работе впервые получены точные аналитические выражения для электромагнитных поправок пятого порядка по постоянной тонкой структуре α к аномальному магнитному моменту лептонов от фейнмановских диаграмм со вставками поляризаационного оператора из четырех одинаковых лептонных петель. Использувавшийся подход может быть применен не только для рассмотренного случая вставок из четырех одинаковых лептонных петель, но и для расчета электромагнитных поправок к аномальному магнитному моменту лептонов при произвольном числе лептонных n петель, образованных лептонами типа ℓ , отличными от внешнего лептона L ($\ell \neq L$), а также лептонами того же типа, что и L ($n = p + j$). Следует подчеркнуть, что выражение (5) для поправок $a_L(p + j)$ применимо во всем диапазоне значений отношения масс лептонов, $0 < r = m_\ell / m_L < \infty$. Полученные точные выражения (25) и (30), несмотря на их громоздкость, позволяют легко проводить численные расчеты с любой наперед заданной точностью. Асимптотические разложения, полученные из (25) и (30) в пределе как больших ($r \gg 1$), так и малых ($r \ll 1$) отношений масс лептонов, согласуются с приведенными в литературе выражениями и вполне пригодны для оценки рассматриваемой поправки пятого порядка к аномальному магнитному моменту любого лептона (e, μ и τ) и с любыми лептонными вставками.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Международной программы сотрудничества между Республикой Беларусь и ОИЯИ.

Acknowledgements. This work was supported by the International Program of Cooperation between the Republic of Belarus and JINR.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Dirac, P. A. M. The quantum theory of the electron / P. A. M. Dirac // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1928. – Vol. 117, № 778. – P. 610–624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>
2. Jegerlehner, F. The Anomalous Magnetic Moment of the Muon / F. Jegerlehner. – Springer Cham, 2017. – 693 p. – (Springer Tracts in Modern Physics). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63577-4>
3. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model / T. Aoyama [et al.] // Phys. Rep. – 2020. – Vol. 887. – P. 1–166. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>
4. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model / R. H. Parker [et al.] // Science. – 2018. – Vol. 360, № 6385. – P. 191–195. <https://doi.org/10.1126/science.aap7706>
5. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion / L. Morel [et al.] // Nature. – 2020. – Vol. 588. – P. 61–65. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>
6. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. / B. Abi [et al.]; (Muon $g - 2$ Collaboration) // Phys. Rev. Lett. – 2021. – Vol. 126. – ID 141801. – 11 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.141801>
7. Schwinger, J. S. Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: radiative corrections to scattering / J. S. Schwinger // Phys. Rev. – 1949. – Vol. 76. – P. 790–817. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.790>
8. Petermann, A. Fourth order magnetic moment of the electron / A. Petermann // Nucl. Phys. – 1958. – Vol. 5. – P. 667–683. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(58\)90065-8](https://doi.org/10.1016/0029-5582(58)90065-8)
9. Sommerfield, C. M. Magnetic dipole moment of the electron / C. M. Sommerfield // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 107, № 1. – P. 328–329. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.328>
10. Laporta, S. High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron $g - 2$ in QED / S. Laporta // Phys. Lett. – 2017. – Vol. 772. – P. 232–238. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.06.056>
11. Laporta, S. High-precision calculation of the 4-loop QED contribution to the slope of the Dirac form factor / S. Laporta // Phys. Lett. B. – 2020. – Vol. 800. – Art. ID 135137. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135137>
12. Laporta, S. The analytical contribution of the sixth order graphs with vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED / S. Laporta // Il Nuovo Cim. A. – 1993. – Vol. 106. – P. 675–683. <https://doi.org/10.1007/bf02787236>
13. Laporta, S. The analytical contribution of some eighth order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED / S. Laporta // Phys. Lett. B. – 1993. – Vol. 312, № 4. – P. 495–500. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90988-T](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90988-T)
14. Friot, S. Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin-Barnes representation / S. Friot, D. Greynat, E. de Rafael // Phys. Lett. B. – 2005. – Vol. 628, № 1–2. – P. 73–84. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.126>
15. Aguilar, J. P. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation. / J. P. Aguilar, D. Greynat, E. Rafael // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 77, № 9. – Art. ID 093010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.77.093010>
16. Solovtsova, O. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin-Barnes representation / O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich, L. P. Kaptari // Eur. Phys. J. Plus. – 2023. – Vol. 138. – Art. ID 212. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03834-4>
17. Lautrup, B. On high order estimates in QED / B. Lautrup // Phys. Lett. B. – 1977. – Vol. 69, № 1. – P. 109–111. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90145-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90145-9)
18. Berestetskii, V. B. Concerning the radiative corrections to the mu-meson magnetic moment / V. B. Berestetskii, O. N. Krohnnin, A. K. Khlebnikov // J. Exp. Theor. Phys. – 1956. – Vol. 30, № 5. – P. 761–762.
19. Brodsky, S. J. Suggested boson-lepton pair coupling and the anomalous magnetic moment of the muon / S. J. Brodsky, E. de Rafael, // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 168. – P. 1620–1622. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.168.1620>
20. Dubovyk, I. Mellin-Barnes Integrals: A Primer on Particle Physics Applications / I. Dubovyk, J. Gluza, G. Somogyi. – Springer Cham, 2022. – 266 p. – (Springer Nature Switzerland AG). <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14272-7>
21. Smirnov, V. A. Analytic Tools for Feynman Integrals / V. A. Smirnov. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. – 298 p. – (Springer Tracts Mod. Phys.). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-34886-0>
22. Boos, E. E. A method of evaluation massive Feynman diagrams / E. E. Boos, A. I. Davydychev // Theor. Math. Phys. – 1991. – Vol. 89. – P. 1052–1064. <https://doi.org/10.1007/bf01016805>
23. Lautrup, B. E. Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron / B. E. Lautrup, E. de Rafael // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 174. – P. 1835–1842. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1835>
24. Laursen, M. L. The n -bubble diagram contribution to $g-2$ / M. L. Laursen, M. A. Samuel // J. Math. Phys. – 1981. – Vol. 22, № 5. – P. 1114–1126. <https://doi.org/10.1063/1.524995>
25. Лашкевич, В. И. О вкладах высших порядков в аномальные магнитные моменты лептонов от поляризации вакуума лептонными петлями / В. И. Лашкевич, О. П. Соловцова, О. В. Теряев // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 412–423. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>
26. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018 / E. Tiesinga [et al.] // Rev. Mod. Phys. – 2021. – Vol. 93, № 2. – Art. ID 025010. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>
27. Laporta, S. Analytical and numerical contributions of some tenth-order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED / S. Laporta // Phys. Lett. B. – 1994. – Vol. 328, № 3–4. – P. 522–527. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)91513-x](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)91513-x)

References

1. Dirac P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1972, vol. 117, no. 778, pp. 610–624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>
2. Jegerlehner F. *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon. Springer Tracts in Modern Physics*. Springer Cham, 2017. 693 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63577-4>
3. Aoyama T., Asmussen N., Benayoun M., Bijnens J., Blum T., Bruno M. [et al.]. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, 2020, vol. 887, pp. 1–166. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>
4. Parker R. H., Chenghui Y., Zhong W., Estey B., Müller H. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *Science*, 2018, vol. 360, no. 6385, pp. 191–195. <https://doi.org/10.1126/science.aap7706>
5. Morel L., Yao Z., Cladé P., Guellati-Khélifa S. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, 2020, vol. 588, pp. 61–65. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>
6. Abi B., Albahri T., Al-Kilani S., Allspach D., Alonzi L. P., Anastasi A., Anisenkov A. [et al.]; (Muon $g-2$ Collaboration). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letters*, 2021, vol. 126, art. ID 141801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.126.141801>
7. Schwinger J. S. Quantum electrodynamics. III: The electromagnetic properties of the electron: radiative corrections to scattering. *Physical Review*, 1949, vol. 76, pp. 790–817. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.790>
8. Petermann A. Fourth order magnetic moment of the electron. *Nuclear Physics*, 1958, vol. 5, pp. 667–683. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(58\)90065-8](https://doi.org/10.1016/0029-5582(58)90065-8)
9. Sommerfield C. M. Magnetic dipole moment of the electron. *Physical Review*, 1957, vol. 107, pp. 328–329. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.107.328>
10. Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron $g-2$ in QED. *Physics Letters B*, 2017, vol. 772, no. 1, pp. 232–238. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.06.056>
11. Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop QED contribution to the slope of the Dirac form factor. *Physics Letters B*, 2020, vol. 800, art. ID 135137. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135137>
12. Laporta S. The analytical contribution of the sixth order graphs with vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED. *Il Nuovo Cimento A*, 1993, vol. 106, pp. 675–683. <https://doi.org/10.1007/bf02787236>
13. Laporta S. The analytical contribution of some eighth order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED. *Physics Letters B*, 1993, vol. 312, no. 4, pp. 495–500. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)90988-T](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90988-T)
14. Friot S., Greynat D., Rafael E. Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin-Barnes representation. *Physics Letters B*, 2005, vol. 628, no. 1–2, pp. 73–84. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.08.126>
15. Aguilar J. P., Greynat D., Rafael E. Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation. *Physical Review D*, 2008, vol. 77, no. 9, art. ID 093010. <https://doi.org/10.1103/physrevd.77.093010>
16. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin-Barnes representation. *European Physical Journal Plus*, 2023, vol. 138, art. ID 212. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03834-4>
17. Lautrup B. On high order estimates in QED. *Physics Letters B*, 1977, vol. 69, no. 1, pp. 109–111. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90145-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90145-9)
18. Berestetskii V. B., Krohnin O. N., Khlebnikov A. K. Concerning the radiative corrections to the mu-meson magnetic moment. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1956, vol. 30, no. 5, pp. 761–762.
19. Brodsky S. J., Rafael E. Suggested boson-lepton pair coupling and the anomalous magnetic moment of the muon. *Physical Review*, 1968, vol. 168, pp. 1620–1622. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.168.1620>
20. Duboviy I., Gluza J., Somogyi G. *Mellin-Barnes Integrals: A Primer on Particle Physics Applications. Lecture Notes in Physics*. Springer Cham, 2022. 266 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-14272-7>
21. Smirnov V. A. *Analytic Tools for Feynman Integrals. Springer Tracts in Modern Physics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012. 298 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-34886-0>
22. Boos E. E., Davydychev A. I. A method of evaluation massive Feynman diagrams. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, vol. 89, pp. 1052–1064. <https://doi.org/10.1007/bf01016805>
23. Lautrup B. E., Rafael E. Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron. *Physical Review*, 1968, vol. 174, pp. 1835–1842. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1835>
24. Laursen M. L., Samuel M. A. The n -bubble diagram contribution to $g-2$. *Journal of Mathematical Physics*, 1981, vol. 22, no. 5, pp. 1114–1126. <https://doi.org/10.1063/1.524995>
25. Lashkevich V. I., Solovtsova O. P., Tetyaev O. V. On high order contributions to the anomalous magnetic moments of leptons due to the vacuum polarization by lepton loops. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 4, pp. 412–423 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-412-423>
26. Tiesinga E., Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. *Reviews of Modern Physics*, 2021, vol. 93, no. 2, art. ID 025010. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>
27. Laporta S. Analytical and numerical contributions of some tenth-order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED. *Physics Letters B*, 1994, vol. 328, no. 3–4, pp. 522–527. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)91513-x](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)91513-x)

Информация об авторах

Соловцова Ольга Павловна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник научно-исследовательской части, Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого (пр. Октября, 48, 246029, Гомель, Республика Беларусь); ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Дубна, Московская обл., Российская Федерация, 141980). E-mail: olsol07@mail.ru, olsol@theor.jinr.ru

Лашкевич Василий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика», Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого (пр. Октября, 48, 246029, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: lashkevich@gstu.gomel.by

Каптарь Леонид Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики имени Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Дубна, Московская обл., Российская Федерация). E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

Information about the authors

Olga P. Solovtsova – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Scientific Research Center, Sukhoi State Technical University of Gomel (48, Octiabrya Ave., 246029, Gomel, Republic of Belarus); Leading Researcher of the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Moscow Region, Russian Federation). E-mail: olsol07@mail.ru, olsol@theor.jinr.ru

Vasil I. Lashkevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Sukhoi State Technical University of Gomel (48, Octiabrya Ave., 246029, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: lashkevich@gstu.gomel.by

Leonid P. Kaptari – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Leading Researcher of Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Moscow Region, Russian Federation). E-mail: kaptari@theor.jinr.ru