Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОБРАЗОВ СИММЕТРИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 XII 1947)

В заметке (1) мы определили понятие образа симметрии, т. е. геометрического места таких точек однородного пространства, которые остаются инвариантными при применении инволютивного элемента основной группы пространства — симметрии (квадрат такого элемента равен единице группы).

Примерами образов симметрии являются m-плоскости евклидова n-пространства R_n, l-псевдоевклидова n-пространства ${}^lR_n$, эллиптического n-пространства S_n, гиперболического n-пространства ${}^1S_n$, l-псевдоэллиптического n-пространства ${}^lS_n$, комплексного унитарно-эллиптического n-пространства K_n, двойного унитарно-эллиптического n-пространства B_n, n-цепи (действительные n-плоскости) пространств K_n и B_n, m-сферы конформного n-пространства C_n, m-пары (конфигурации m-плоскость $+$ $(n-m-1)$-плоскость) и $(n-1)$-квадрики проективного n-пространства P_n. Соответственные симметрии — отражения R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$, K_n, B_n, инверсии C_n, инволютивные коллинеации и поляритеты P_n.

В заметке (1) доказывается, что все эти образы могут быть „представлены“ m-плоскостями ${}^lS_n$, причем преобразования их основных групп представляются движениями ${}^lS_n$, находятся взаимные параметры пар образов симметрии, устанавливается инвариантная метрика и аффинная связность в пространствах образов симметрии и находятся геодезические линии в этих пространствах.

Основным понятием дифференциальной геометрии образов симметрии является понятие линейного элемента в пространстве образов симметрии, определяемого двумя бесконечно близкими образами.

Теорема 1. *Локальными параметрами линейного элемента в пространстве образов симметрии являются предельные положения инвариантных подпространств матрицы произведения симметрий двух бесконечно близких образов при их стремлении друг к другу и производные инвариантных при групповом преобразовании определяющих чисел нормальной формы этой матрицы по расстоянию между образами симметрии в инвариантной метрике. В общем случае эти параметры однозначно определяют линейный элемент.*

Производные $k_a = d\omega_a/d\omega$ будем называть направляющими косинусами линейного элемента ($\sum\limits_\alpha k_a^2 = 1$), для m-плоскостей R_n и ${}^lR_n$ производную $k_0 = d\omega_0/d\omega$ будем называть параметром распределения линейного элемента (k_0 для прямых R_3 и k_0/k_1 для прямых S_3 и ${}^1S_3$ — обычные параметры распределения). Точки пересечения m-плоскости с предельными положениями общих перпендикуляров двух бесконечно близких плоскостей будем называть центрами m-плоскости в данном направлении (для прямых R_3, S_3, ${}^1S_3$ — обычные центры луча). Соответственные параметры для m-сфер C_n — многомерные обобщения параметров Вессио (²) для кругов C_3.

Линейный элемент в пространстве образов симметрии благодаря связности или метрике (¹) может быть определен также локальным вектором.

Теорема 2. *За локальные векторы пространства образов симметрии можно считать векторы алгебры Ли основной группы, являющиеся производными матриц произведений симметрий пар бесконечно близких образов по расстоянию между этими образами в их инвариантной метрике. Связь локального вектора l с локальными параметрами линейного элемента устанавливается формулой*

$$l=\frac{dg}{d\omega}=\frac{d}{d\omega}a^{-1}g_0(\omega)\,a\,,$$

где $g(\omega)$ — 1-параметрическая подгруппа, соединяющая единицу группы с матрицей произведения симметрий двух бесконечно близких образов; $g_0(\omega)$ — та же подгруппа, все матрицы которой одновременно приведены к нормальной форме; a — матрица преобразования, переводящего рассматриваемый образ симметрии в себя, определяющая инвариантные подпространства матриц $g(\omega)$.

Симметрия относительно рассматриваемого образа порождает в основной группе и ее алгебре Ли инволютивный автоморфизм. Векторы l при этом автоморфизме меняют знак и потому имеют наиболее простой вид, если в алгебре Ли выбран базис из векторов инвариантных и меняющих знак при этом автоморфизме. Будем предполагать это условие выполненным. Тогда для m-пар P_n ненулевые компоненты l располагаются в двух матрицах размером $(m+1)\times(n-m)$, для m-плоскостей S_n, ^1S_n, ^lS_n, R_n и ^lR_n, которые можно рассматривать как m-пары специального вида (полярные относительно абсолюта); элементы одной из этих матриц линейно выражаются через элементы другой, так что локальный вектор содержит $(m+1)\times(n-m)$ линейно независимых компонент. Точно так же для m-сфер C_n локальный вектор приводится к одной матрице размера $(m+2)\times(n-m)$, а для m-плоскостей K_n и B_n к 2 действительным матрицам размера $(m+1)\times(n-m)$. Для n-цепей K_n и B_n и $(n-1)$-квадрик P_n локальный вектор приводится к симметричной матрице размером $(n+1)^2$. Для m-плоскостей R_n таким образом можно получить формулу (14) нашей работы (³).

Формула теоремы 2 позволяет в общем случае и обратно, зная только компоненты локального вектора l, найти геометрические параметры (т. е. матрицу a) и числовые параметры (т. е. матрицу g_0) данного линейного элемента.

Если нам дано семейство образов симметрии, зависящее от k переменных $u^1, \ldots, u^k$, то, вводя обозначения $du^p/d\omega=\lambda^p$, $l_p=\partial g/\partial u^p$, мы находим зависимость произвольного локального вектора l семейства от локальных координат λ^p в виде $l=\sum_p l_p\lambda^p$. Подставляя эти значения l в формулы, выражающие локальные параметры через компоненты l, мы найдем зависимость локальных параметров от направления в семействе образов симметрии.

Получающиеся здесь формулы включают как частные случаи формулы Гамильтона и Мангейма, выражающие зависимость абсциссы центра луча и параметра распределения от направления в конгруенции прямых в R_3 ((⁴), стр. 304) и аналогичные формулы Кулиджа (⁵) для S_3 и $^1S_3$.

Будем рассматривать образы симметрии в таких однородных пространствах, элементами которых являются некоторые другие

„основные“ образы симметрии. При этом в пространствах R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$, K_n и B_n за такие образы мы будем считать точки или $(n-1)$-плоскости, в C_n — точки и $(n-1)$-сферы (точки в C_n также можно рассматривать как предельные образы симметрии), в P_n — 0-пары. Для всех рассмотренных нами образов можно ввести понятие инцидентности с основными образами: m-плоскость (m-сфера, n-цепь) инцидентна с точкой, если точка лежит на ней, и инцидентна с $(n-1)$-плоскостью ($(n-1)$-сферой), если последняя проходит через нее; m-пара инцидентна с 0-парой, если ее плоскости соответственно инцидентны с точкой или $(n-1)$-плоскостью 0-пары; $(n-1)$-квадрика инцидентна с 0-парой, если 0-пара полярна относительно нее (т. е. мы рассматриваем $(n-1)$-квадрику не как геометрическое место точек, а как геометрическое место 0-пар, связанных поляритетом).

Будем называть *конгруенцией* образов симметрии такое семейство этих образов, что каждый элемент некоторой области основного пространства инцидентен только с одним образом семейства. Для m-плоскостей R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$ мы получаем конгруенцию плоскостей в смысле В. В. Вагнера (6) — семейство, зависящее от $n-m$ переменных, и, если за основной образ считать $(n-1)$-плоскость — „*псевдоконгруенцию*“ — семейство, зависящее от $m+1$ переменных (для прямых R_3, S_3, ${}^1S_3$ в обоих случаях это обычная конгруенция прямых). Таким же образом мы получаем конгруенции и псевдоконгруенции m-сфер (зависящие от $n-m$ и $m+2$ переменных), конгруенции и псевдоконгруенции m-пар P_n и m-плоскостей K_n и B_n (зависящие от $2(n-m)$ и $2(m+1)$ действительных переменных или от, соответственно, $n-m$ или $m+1$ комплексных или двойных переменных) и конгруенции $(n-1)$-квадрик P_n и n-цепей K_n и B_n (зависящие от n действительных переменных).

Теорема 3. *В конгруенциях рассмотренных образов симметрии строки или столбцы матрицы компонент локального вектора l линейно зависят друг от друга, благодаря чему здесь можно определить локальные аффинные или проективные преобразования, отображающие эти строки или столбцы друг на друга. Эти преобразования определяют локальную структуру конгруенций образов симметрии и при определенных условиях определяют всю конгруенцию до группового преобразования.*

Эти локальные преобразования являются аффинными (характеризуются аффинорами) для конгруенций и псевдоконгруенций m-плоскостей R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$, K_n и B_n, m-сфер C_n и m-пар P_n и проективными для n-цепей K_n и B_n и для $(n-1)$-квадрик P_n. Условие определения конгруенции до группового преобразования с помощью этих локальных преобразований m-плоскостей R_n и ${}^lR_n$ имеет вид $n+m \leqslant (n-m)^2$, для m-плоскостей S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$, K_n и B_n и m-пар P_n $n \leqslant (n-m)^2$, для m-сфер C_n $n+1 \leqslant (n-m)^2$, для $(n-1)$-квадрик P_n и n-цепей K_n и B_n это определение имеет место всегда. Доказательство этого утверждения для конгруенций m-плоскостей R_n и S_n (непосредственно переносимое на ${}^lR_n$ и ${}^lS_n$) приведено в нашей работе (3), где найдены также все связи между локальными аффинорами и указан способ их нормирования, определяющий локальный базис m-плоскости, инвариантно связанный с конгруенцией. Все остальные конгруенции рассмотренных образов симметрии с помощью представлений (1) могут быть представлены конгруенциями или псевдоконгруенциями m-плоскостей ${}^lS_n$, откуда следуют условия определения этих конгруенций до группового преобразования и другие результаты, аналогичные упомянутым результатам теории конгруенций m-плоскостей.

Аффиноры теоремы 3 для конгруенций m-плоскостей R_n являются специальными случаями аффиноров В. В. Вагнера (6), усилением теоремы которого является упомянутая теорема работы (3). Для конгруенций прямых R_3 эти аффиноры совпадают с известными аффинорами Куммера — Я. С. Дубнова ([7]), для конгруенций прямых S_3 и ${}^1S_3$ — с аффинорами Фибби — Кулиджа ([5]), для одного специального типа конгруенций кругов C_3 — с аффинорами Кулиджа ([8]).

Специальные типы локальных аффиноров выделяют специальные типы конгруенций образов симметрии. Например, для конгруенции прямых в R_n, ${}^lR_n$, S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$ симметрии единственного аффинора теоремы 3 соответствует нормальная конгруенция (состоящая из нормалей к последовательности $(n-1)$-поверхностей), а антисимметрии этого аффинора соответствует изотропная конгруенция (у которой центры лучей на каждом луче совпадают между собой). В S_3, ${}^1S_3$, ${}^2S_3$ конгруенция прямых является псевдоконгруенцией и для нее можно определить другой аффинор теоремы 3, симметрия которого выделяет псевдонормальную конгруенцию, а антисимметрия — псевдоизотропную конгруенцию (конгруенции поляр к, соответственно, нормальной и изотропной конгруенции). Для псевдоконгруенции прямых в S_n, ${}^1S_n$, ${}^lS_n$ имеются $n-2$ независимых аффиноров теоремы 3. Тождественное обращение $n-3$ из них в нуль выделяет *фокальную псевдоконгруенцию*, на каждом луче которой имеется два фокуса. Предельные 3-плоскости, порожденные данным лучом и бесконечно близкими лучами, совпадают между собой, и окрестность луча в фокальной псевдоконгруенции устроена, как в S_3 или ${}^lS_3$. Поэтому такую псевдоконгруенцию можно характеризовать, как конгруенцию в S_3 или ${}^lS_3$, одним из двух аффиноров. Их симметрия или антисимметрия выделяет нормальную, изотропную, псевдонормальную или псевдоизотропную фокальные псевдоконгруенции.

Если отобразить пространство пар прямых P_3 согласно ([1]) на пространство прямых ${}^3S_5$, то псевдоконгруенции прямых в ${}^3S_5$ представляют пары конгруенций прямых в P_3 и аффиноры теоремы 3 определяют их внутреннюю структуру. Фокальная псевдоконгруенция ${}^3S_5$ представляет „преобразование T“ С. П. Финикова (([9]), стр. 177), случаям симметрии наших аффиноров соответствует пара конгруенций Бианки (([9]), стр. 194) и расслояемая пара конгруенций Фубини (([9]), стр. 184), совпадению этих двух случаев — сопряженная пара (([9]), стр. 187), случаи антисимметрии наших аффиноров выделяют новые типы преобразований T.

Для конгруенций кругов C_n имеются 3 независимых аффинора теоремы 3. Тождественное обращение двух из них в нуль выделяет *фокальные конгруенции кругов*, на каждом луче которой имеется $n-1$ фокусов.

Такие конгруенции в C_3 рассматривались Кулиджем ([8]). Симметрия нашего аффинора выделяет нормальные конгруенции кругов (ортогональные к последовательности $(n-1)$-поверхностей), в C_3 — „циклические системы“ Рибокура.

Поступило
22 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Розенфельд, ДАН, **57**, № 6, 543 (1947). [2] E. Vessiot, J. math. pure et appl., (9), 2, 97 (1923). [3] Б. А. Розенфельд, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 283 (1947). [4] В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ч. 1, М. — Л., 1935. [5] J. L. Coolidge, The Elements of Non-euclidian Geometry, Oxford, 1909. [6] В. В. Вагнер, Матем. сб., **10** (52):3, 163 (1942). [7] Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу при МГУ, **1**, 233 (1933). [8] J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, Oxford, 1916. [9] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, М. — Л., 1937.