Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

*МАТЕМАТИКА*

С. Г. МИХЛИН

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ F. TRICOMI

*(Представлено академиком В. И. Смирновым 29 XII 1947)*

В связи с основной задачей для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа F. Tricomi [1] изучает сингулярное интегральное уравнение

$$v(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y-2xy}\right) v(y)\, dy = f(x). \qquad (1)$$

Это уравнение не принадлежит к тому классу, который был изучен T. Carleman'ом [2] и Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [3], так как „несингулярная" часть ядра $\frac{1}{x+y-2xy}$ не суммируема в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тем не менее, как мы покажем, метод Carleman'a с успехом может быть применен к решению этого уравнения. Сам F. Tricomi решает свое уравнение весьма сложным приемом: его решение, вместе с исправлениями переводчика, проф. Ф. И. Франкль, занимает в русском переводе мемуара [1] 17 страниц.

Полагая $x^{2/3} v(x) = \varphi(x)$, $x^{2/3} f(x) = g(x)$, мы приведем уравнение (1) к виду

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x+y-2xy}\right) \varphi(y)\, dy = g(x). \qquad (2)$$

Будем считать, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшитца с некоторым положительным показателем на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Неизвестную $\varphi(x)$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям: a) на всяком отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где $0 < a < b < 1$, $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшитца с положительным показателем; b) произведения $\varphi(x) \ln x$ и $\varphi(x) \ln(1-x)$ суммируемы на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть $z$ — произвольная точка комплексной плоскости. Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{y-z} - \frac{1}{z+y-2zy}\right) \varphi(y)\, dy. \qquad (3)$$

Очевидно, $\Phi(z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Отметим еще, что $\Phi(z)\to 0$ если $\operatorname{Im} z\to\infty$. Обозначим через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ предельные значения $\Phi(z)$, когда $z$ стремится к точке $x$ действительной оси соответственно из верхней или из нижней полуплоскости. Уравнение (2) переходит в следующее:

$$(1-i\pi\lambda)\,\Phi^+(x)-(1+i\pi\lambda)\,\Phi^-(x)=g(x),\quad 0<x<1. \tag{4}$$

Из (3) легко усмотреть, что

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right)=(2z-1)\,\Phi(z). \tag{5}$$

Дробно-линейное преобразование $t=\frac{z}{2z-1}$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот; отрезок $(0,1)$ переходит при этом в два луча $(0,-\infty)$ и $(\infty, 1)$. Заменяя в (4) $x$ через $\frac{x}{2x-1}$ и пользуясь соотношением (5), мы получим

$$(1-i\pi\lambda)\,\Phi^-(x)-(1+i\pi\lambda)\,\Phi^+(x)=\frac{1}{2x-1}\,g\left(\frac{x}{2x-1}\right),\ x<0 \text{ или } x>1. \tag{4'}$$

Положим теперь

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1+i\pi\lambda}{1-i\pi\lambda}, & 0<x<1;\\[2ex] \dfrac{1-i\pi\lambda}{1+i\pi\lambda}, & x<0 \text{ или } x>1;\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{1-i\pi\lambda}, & 0<x<1;\\[2ex] \dfrac{g\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)}{(1+i\pi\lambda)(2x-1)}, & x<0 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Уравнения (4) и (4') можно соединить в одно

$$\Phi^+(x)-G(x)\,\Phi^-(x)=h(x),\quad -\infty<x<\infty,\ x\neq 0,\ x\neq 1. \tag{6}$$

Решим предварительно соответствующую однородную задачу. Найдем функцию $\chi(z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую на действительной оси уравнению

$$\chi^+(x)=G(x)\,\chi^-(x),$$

или, что то же,

$$\ln\chi^+(x)-\ln\chi^-(x)=\ln G(x).$$

Одно из решений последнего уравнения есть

$$\ln\chi(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\frac{\ln G(x)}{x-z}\,dx.$$

Последний интеграл легко вычисляется: обозначая $\theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\lambda\pi$, $-\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2}$, имеем

$$\ln\chi^{+}(z)=2\,\theta\ln\frac{1-z}{z}+i\pi\theta,\quad \ln\chi^{-}(z)=2\,\theta\ln\frac{1-z}{z}-i\pi\theta.$$

Под $\ln\frac{1-z}{z}$ следует понимать ту ветвь логарифма, которая голоморфна в плоскости, разрезанной вдоль лучей $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$, и которая принимает действительные значения на отрезке $(0,1)$. Теперь

$$\chi^{+}(z)=e^{i\pi\theta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{2\theta},\quad \chi^{-}(z)=e^{-i\pi\theta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{2\theta}.$$

Разделив уравнение (6) на $\chi^{+}(z)$, мы приведем его к виду

$$\frac{\Phi^{+}(z)}{\chi^{+}(z)}-\frac{\Phi^{-}(z)}{\chi^{-}(z)}=\frac{h(x)}{\chi^{+}(x)};$$

одно из решений последнего уравнения есть

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(y)}{\chi^{+}(y)}\frac{dy}{y-z}.$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi_0^{+}(x)}{\chi^{+}(x)}-\frac{\Phi_0^{-}(x)}{\chi^{-}(x)}=0.$$

Это уравнение показывает, что функция $F(z)=\frac{\Phi_0(z)}{\chi(z)}$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z=0$ и $z=1$. Допуская, что произведения $\varphi(x)\ln x$ и $\varphi(x)\ln(1-x)$ суммируемы, мы легко найдем, что при $\theta<0$ $F(z)=\frac{a}{z}$, а при $\theta>0$ $F(z)=\frac{a}{1-z}$, где $a$ — произвольная постоянная.

Теперь общее решение уравнения (6) принимает вид

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(y)}{\chi^{+}(y)}\frac{dy}{y-z}+a\frac{\chi(z)}{z},\quad \theta<0,$$

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(y)}{\chi^{+}(y)}\frac{dy}{y-z}+a\frac{\chi(z)}{1-z},\quad \theta>0. \tag{7}$$

Интеграл в (7) разобьем на три по промежуткам $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ и $(0,1)$; в первых двух заменим $y$ через $\frac{y}{2y-1}$. Далее $\varphi(x)$ определим по формуле

$$\varphi(x)=\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x),\quad 0<x<1.$$

2*

Произведя необходимые вычисления, мы придем к решению F. Tricomi

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left\{g(x)+\lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta}\int_0^1\left(\frac{y}{1-y}\right)^{2\theta}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x+y-2xy}\right)g(y)\,dy\right\}+\frac{A}{x^{1+2\theta^*}(1-x)^{-2\theta^*}},$$

где $\operatorname{tg}\theta^*\pi=\lambda\pi$, $-1<\theta^*<0$ и $A$ — произвольная постоянная.

Ленинградский государственный университет

Поступило 29 XII 1947

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Tricomi, Mem. Acad. Naz. d. Linzei, ser. 5, 14, fasc. 7 (1923) (русск. пер. Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, 1947). [2] T. Carleman, Arkiv f. Mathematic, Astronomi och Physik, 16, No. 26 (1922). [3] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, Тр. Тбилисск. мат. ин-та, 12, 1 (1943).