Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИКА

М. И. МИНКЕВИЧ

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК В ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XII 1947)

Мы рассматриваем однопараметрические системы отображений компактного метрического пространства R на самого себя, которые подчинены некоторым основным требованиям, называемым аксиомами систем отображений *.

Аксиомы эти следующие;

1. Каждой точке $p \in R$ для каждого значения параметра t $(-\infty < t < +\infty)$ приводится в соответствие вполне определенное замкнутое множество из R, обозначаемое $S_p(t)$. Множеству $F \subset R$ приводится в соответствие множество $S_F(t) = \sum\limits_{p \in F} S_p(t)$. Если $F' \subset F$, то удовлетворяется соотношение

$$S_{F'(t)} \subseteq S_F(t) \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Множество образов точки p в R, соответствующих всем значениям t $(-\infty < t < +\infty)$, называется воронкой точки p и обозначается T_p; множество же образов, соответствующих $t \geqslant 0$ или $t \leqslant 0$,— правой, соответственно, левой полуворонкой $(T_p^+,\ T_p^-)$.

Множество $S_p(t)$ называется сечением воронки, соответствующим значению t параметра.

Точка p называется точкой единственности справа или слева (или без этих ограничений), если образы точки p в соответствующую сторону изменения параметра до некоторого значения t (или в обе стороны) являются точками.

2. Если t_1 и t_2 — значения t одного и того же знака, то имеет место закон группы

$$S_{S_{p(t_1)}}(t_2) = S_p(t_1 + t_2).$$

В этом случае справедлив коммутативный закон

$$S_{S_{p(t_1)}}(t_2) = S_{S_{p(t_2)}}(t_1).$$

3. Имеет место следующий закон обратимости (аксиома Барбашина):

$$\text{если } q \in S_p(t), \qquad \text{то } p \in S_q(-t).$$

---

* Впервые обобщенные динамические системы и аксиоматика их были рассмотрены Е. А. Барбашиным [1].

Из аксиомы 3 в сочетании с аксиомой 2 следует, что при t_1 и t_2 разных знаков удовлетворяется соотношение

$$S_{S_p(t_1)}(t_2) \supseteq S_p(t_1 + t_2).$$

4. Непрерывность отображений по параметру t: для каждых заданных точки $p \in R$, значения t и $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для $|t' - t| < \delta$

$$\alpha [S_p(t'),\ S_p(t)] < \varepsilon,$$

где α — отклонение множеств в смысле Хаусдорфа (²).

Эта непрерывность равномерна на замкнутом интервале. Из аксиомы 4 следует замкнутость отрезка воронки на сегменте $t' \leqslant t \leqslant t''$.

5. Непрерывность отображений по области: рассматриваются локальная и интегральная непрерывность. Требование существования непрерывности одного из этих двух видов будет оговариваться особо.

5-a. Локальная непрерывность: для точки p можно найти значение $\tau_p > 0$ параметра t такое, что для $|t| \leqslant \tau_p$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек q, для которых $\rho(p, q) < \delta$, где ρ — расстояние между точками,

$$\alpha [S_p(t),\ S_q(t)] < \varepsilon. \qquad (1)$$

5-b. Интегральная непрерывность: для точки p, любого $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon, \tau) > 0$, что для каждой точки, выполняющей требование $\rho(p, q) < \delta$, соотношение (1) справедливо для $|t| \leqslant \tau$.

Легко доказать, что, если аксиома 5-b выполняется для всех точек замкнутого множества $A \subset R$, то она выполняется равномерно в A.

Точки R, для которых выполняются аксиомы 5-a или 5-b, называются, соответственно, точками локальной или интегральной непрерывности. Если аксиомы выполняются при изменении t только в одну сторону, то точки называются, соответственно, локально или интегрально непрерывными справа или слева.

Точки, в которых не выполняются аксиомы 5-a и 5-b, называются точками разрыва отображения.

Заметим, что аксиомы 1, 2, 3, 4 выполняются отображениями, даваемыми системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где правые части предполагаются непрерывными и не подчинены каким-нибудь ограничениям, обеспечивающим единственность решений во всех точках области их существования, но этого нельзя сказать об аксиомах 5-a и 5-b. Точки, называемые нами точками непрерывности отображения, впервые изучались М. Шарпантье (³). Е. А. Барбашин (⁴) показал, что точки непрерывности существуют для всякой системы (2) и составляют в области существования решений основную в дескриптивном отношении массу точек. Однако до сих пор не найдено системы вида (2), все точки области существования решений которой являлись бы точками непрерывности и в то же время единственность не имела места. Для рассматриваемых же семейств отображений легко могут быть построены примеры, где во всех точках пространства R выполняются все аксиомы 1—5.

Зависимость между локальной и интегральной непрерывностью устанавливает следующая

Теорема 1. *Если p — точка локальной непрерывности и если точки любого, соответствующего конечному значению t, отрезка* *ее воронки тоже точки локальной непрерывности, то и сама точка p и все точки ее воронки являются точками интегральной непрерывности.*

На основании этой теоремы все предложения, доказанные для воронок интегрально непрерывных точек, будут справедливы для воронок локально непрерывных точек, состоящих из локально же непрерывных точек. Из интегральной же непрерывности вершины p воронки отнюдь не следует ни локальная, ни интегральная непрерывность всех ее точек. Между тем, в вопросах обобщения на воронки интегрально непрерывных точек свойств траекторий динамических систем, как видно будет из последующего, не всегда требуется, чтобы они состояли из интегрально непрерывных точек. Таким образом, требование локальной непрерывности всех точек воронки оказывается стеснительным, а так как к тому же это требование для одной только вершины оказывается недостаточным для получения желаемых обобщений, то в последующем изложении будет применяться только аксиома 5-b.

Если точке $p \in R$ отнесено значение параметра $t=t_0$, то назовем ω-предельной (α-предельной) точкой воронки T_p точку q, обладающую тем свойством, что существуют сколь угодно большие значения $t=\tau > t_0$ ($\tau < t_0$ для α-предельных точек), на соответствующих которым сечениях $S_q(t)$ существуют точки q_τ, удовлетворяющие соотношению $\rho(q, q_\tau) < \varepsilon$, где ρ — расстояние.

Заметим, что так определенные предельные точки воронки могут не являться предельными точками ни одной из траекторий, образующих воронки, в случае отображений, даваемых системами (2).

В отношении предельных точек справедлива

Теорема 2. *Если ω-предельная (α-предельная) для воронки T_p точка q является точкой интегральной непрерывности, то каждая точка ее воронки T_q есть ω-предельная (α-предельная) точка воронки T_p.*

Переходя к инвариантным множествам, заметим, что аксиома 3 разрешает неоднозначную обратимость отображения, поэтому инвариантность, а следовательно, и минимальность множеств определяются нами при изменении параметра только в одну сторону.

Множество $F \subset R$ называется положительно (отрицательно) инвариантным по отношению к рассматриваемому отображению, если из $p \in F$ следует $S_p(t) \subset F$ для всех $t \geqslant 0$ ($t \leqslant 0$), полагая $S_p(0)=p$.

Множество $F \subset R$ называется ω-минимальным (α-минимальным), если оно не пусто, замкнуто, положительно (отрицательно) инвариантно и не содержит истинного подмножества, обладающего этими же свойствами.

На основании аксиомы 1 T_p^+ есть положительно инвариантное и T_p^- — отрицательно инвариантное множество. На основании теоремы 2, если ω-предельные точки T_p^+ суть точки интегральной непрерывности, то множество ω-предельных точек есть положительно инвариантное множество (аналогично для T_p^-).

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 3. *Замыкание инвариантного (в какую-нибудь сторону) множества, точки прикосновения которого являются точками интегральной непрерывности, есть множество инвариантное (в ту же сторону).*

Теорема 4. *Каждое инвариантное (в какую-нибудь сторону) замкнутое компактное множество содержит некоторое минимальное (в том же смысле) множество.*

Теорема 5. *Если A — замкнутое компактное множество и если множество предельных точек воронок, выходящих из A,* *есть множество инвариантное, то необходимое и достаточное условие минимальности следующее: если $p \in A$, то $\overline{T_p} = A$.*

Теорема 3 дает достаточный, но не необходимый признак инвариантности, так как инвариантным может оказаться и множество, имеющее среди своих точек прикосновения точки разрыва.

Воронка T_p называется положительно (отрицательно) рекуррентной, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $l(\varepsilon) > 0$ ($l(\varepsilon) < 0$), что для любых $t' > 0$, $t'' > 0$ ($t' < 0$, $t'' < 0$) всегда существует такое τ, $0 \leqslant \tau \leqslant l$ ($0 \geqslant \tau \geqslant l$), что для сечений $S_p(t')$ и $S_p(t'' + \tau)$ выполняется соотношение

$$\alpha[S_p(t'), S_p(t'' + \tau)] < \varepsilon.$$

Для рекуррентных воронок имеет место следующая

Теорема 6. *Если ω-предельные точки положительно рекуррентной воронки, находящейся в компактном пространстве, являются точками интегральной непрерывности, то замыкание T_p^+ является ω-минимальным множеством.*

Как показывают приведенные теоремы, непрерывность отображения, имеющая место для окрестности точки интегральной непрерывности, делает эту точку во многих отношениях аналогичной точке области единственности, а поведение ее воронки оказывается аналогичным поведению траектории динамической системы с единственностью

Поступило
25 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Барбашин, Уч. зап. МГУ, 2, в. 100 (1947). [2] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937, стр. 166. [3] M. Charpentier, C. R., 191, 13, 509 (1930). [4] Е. А. Барбашин, ДАН, 41, № 5 (1943).