Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ДОСТИЖИМЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО КОМПАКТА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 11 XII 1947)

Настоящая статья примыкает к недавно опубликованной статье автора ([1]).

1. Функциональная топология. Обозначим через R совокупность ограниченных вещественных функций, заданных на абстрактном множестве элементов Q и удовлетворяющих требованию: для каждых двух точек $q_1, q_2 \in Q$ найдется $x \in R$ так, что $x(q_1) \neq x(q_2)$.

Введем в Q топологию заданием системы окрестностей вида:

$$|x_j(q) - x_j(q_0)| < \varepsilon_j, \quad x_j \in R, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Легко проверить, что при таком введении системы окрестностей в Q множество Q превращается в хаусдорфово топологическое пространство, которое мы будем обозначать $\breve{Q}$ и называть функционально-определенным топологическим пространством ([1]). Элементы R мы будем называть функциями, определяющими топологию в $\breve{Q}$.

Легко видеть, что каждый элемент $x \in R$ является непрерывной функцией на $\breve{Q}$ и потому R является частью пространства $C_{\breve{Q}}$ всех функций, непрерывных и ограниченных на $\breve{Q}$.

Пусть R' — множество функций, содержащее R и содержащееся в $C_{\breve{Q}}$: $R \subseteq R' \subseteq C_{\breve{Q}}$. Нетрудно проверить, что если заменить R на R', то топология в $\breve{Q}$ не изменится. В дальнейшем мы будем считать, что R является линейным пространством функций, содержащим единицу *.

Обозначим через R_Q нормированное пространство ([2]), которое получается из R введением нормы:

$$\|x\| = \sup_{q \in Q} |x(q)| \quad (x \in R).$$

Если R_Q сепарабельно, то $\breve{Q}$ мы будем называть сепарабельным; сепарабельные $\breve{Q}$ обладают счетной базой окрестностей. Если $\breve{Q}$ является бикомпактом, то мы будем называть его функциональным бикомпактом. Сепарабельный функциональный бикомпакт будем кратко называть функциональным компактом.

Пространство R_Q, вообще говоря, неполное; его замыкание в $C_{\breve{Q}}$ является пространством типа (B) ([2]), которое мы обозначим $\breve{R}_Q$.

Пространства R_Q и $\breve{R}_Q$ имеют общее сопряженное пространство (линейных функционалов), которое мы обозначим R^*_Q.

Заметим теперь следующее: пространство $\breve{Q}$ плотно в некотором функциональном бикомпакте Q^0 с той же системой определяющих функций R. Если $\breve{Q}$ сепарабельно, то Q^0 является функциональным компактом.

---

* С небольшими изменениями в изложении можно было бы считать пространство R комплексным линейным пространством.

Действительно, элемент $q \in Q$ порождает элемент $f_q \in R_Q^*$ по формуле $f_q(x) = x(q)$ $(x \in R)$; совокупность всех элементов f_q $(q \in Q)$ мы обозначим $\overline{Q}$. В слабой топологии R_Q^* множество $\overline{Q}$ совпадает с $\tilde{Q}$ и замыканием $\overline{Q}$ в этой топологии является топологическое пространство Q^0, которое содержит $\tilde{Q}$ как плотную часть. По теореме Алаогли [3] пространство Q^0 является бикомпактом.

Пусть $K_{\overline{Q}}$ обозначает наименьшее выпуклое и замкнутое в слабой топологии R_Q^* множество, которое содержит множество $\overline{Q}$. Через $\overline{E}$ обозначим множество экстремальных точек $K_{\overline{Q}}$. Если $\tilde{Q}$ — бикомпакт, то $\overline{Q}$ замкнуто в слабой топологии и $\overline{E}$ является его частью [1]. Множество точек Q, порождающее $\overline{E}$, мы обозначим через E.

Желая выяснить существование минимально замкнутых подмножеств $Q_1 \subseteq \tilde{Q}$ ($\tilde{Q}$ — бикомпакт), заданием на которых определены все элементы R (и притом так, что неотрицательность на Q_1 влечет неотрицательность на Q), автор установил [1], что такое множество существует и единственно, а именно совпадает с замыканием E в $\tilde{Q}$. Это множество мы называем T-границей $\tilde{Q}$. T-граница зависит от выбора множества R. Только что изложенный результат будет использован ниже.

2. Достижимые точки функционального компакта. Определение. Точку q_0 функционально-определенного топологического пространства $\tilde{Q}$ мы будем называть R-достижимой (R-система определяющих функций данной топологии), если существует элемент $x_0 \in R$, который достигает в Q строгого максимума на элементе q_0:

$$x_0(q_0) > x_0(q) \qquad (q \in Q - q_0).$$

Теорема 1. *Множество E_0 R-достижимых точек функционального компакта $\tilde{Q}$ плотно в T-границе $\tilde{Q}$. Всякий элемент из R определен заданием на множестве E_0 и его неотрицательность на E_0 влечет неотрицательность на Q**.

Доказательство. Сохраняя прежние обозначения, мы обозначим через $\overline{E}_0$ множество, порожденное в R_Q^* множеством E_0. Докажем, что $\overline{E}_0 \subseteq \overline{E}$.

Действительно, если $q_1 \in E_0$, то $x_1(q_1) > x_1(q)$ $(q \in Q - q_1)$ при некотором $x_1 \in R$. Множество P точек $f \in K_{\overline{Q}}$, где $f(x_1) = f_{q_1}(x_1)$, имеет экстремальные точки, совпадающие с экстремальными точками $K_{\overline{Q}}$, и так как $\overline{E} \subseteq \overline{Q}$, то P состоит из единственной точки f_{q_1}.

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\overline{E}_0$ плотно в $\overline{E}$.

Обозначим через K_1 выпуклую оболочку множеств $K_{\overline{Q}}$ и $-K_{\overline{Q}}$. Множество K_1 регулярно-выпукло [4], и мы докажем, что оно совпадает с единичной сферой пространства R_Q^*.

Если $x \in R_Q$, то $\|x\| = \sup\limits_{q \in Q} |x(q)| = \sup\limits_{f \in K_1} f(x)$. Отсюда вытекает, что если $f \in K_1$, то $\|f\| \leqslant 1$.

Если $f_0 \overline{\in} K_1$, то найдется $y \in \tilde{R}_Q$ так, что $f_0(y) > \sup\limits_{f \in K_1} f(y)$. Следовательно, $f_0(y) > \|y\|$, и потому $\|f_0\| > 1$. Таким образом, K_1 совпадает с единичной сферой R_Q^*.

Пространство R_Q сепарабельно и, по известной теореме Мазура [5], граница единичной сферы в R_Q содержит плотное подмножество

* Заметим, что существует пример функционального бикомпакта, не имеющего ни одной достижимой точки.

точек $\mathfrak{S}$, в каждой из которых имеется касательная гиперплоскость к единичной сфере R_Q.

Если $x_1 \in \mathfrak{S}$ и $\varphi_1(x) = 1$ — соответственная касательная гиперплоскость, то $\|\varphi_1\| = 1$ и $1 = \varphi_1(x_1)\| \geqslant \varphi_1(x)$ при $x \in R_Q$ и $\|x\| \leqslant 1$; вместе с тем, не существует другого элемента $\varphi \in R_Q^*$, обладающего перечисленными свойствами элемента φ_1 относительно x_1. Отсюда вытекает

$$1 = \varphi_1(x_1) > \varphi(x_1) \qquad (\varphi \in K_1 - \varphi_1).$$

Очевидно, что элемент φ_1 является экстремальной точкой K_1, и потому $\varphi_1 \in \pm \overline{E} \subseteq \pm \overline{Q}$. Отсюда вытекает также $\varphi_1 \in \pm \overline{E}_0$.

Допустим теперь, что $\overline{E}_0$ не плотно в $\overline{E}$ и пусть $f_{q_0} \in \overline{E}$ — точка, для которой существует окрестность $V(f_{q_0})$ в $\overline{Q}$, не содержащая точек $\overline{E}_0$. Пусть $\overline{V}(f_{q_0})$ — соответствующая окрестность f_{q_0} в K_1, выбранная так, чтобы она не содержала точек $-K_{\overline{Q}}$.

По критерию экстремальности ([1]) точки f_{q_0} в K_1 найдется элемент $u \in \tilde{R}_Q$ $(\|u\| = 1)$ так, что

$$f_{q_0}(u) = \sup_{f \in K_1 - \overline{V}(f_{q_0})} f(u).$$

Вместо элемента u можно выбрать достаточно близкий к нему элемент $x_1 \in \mathfrak{S}$ так, чтобы

$$x_1(q_0) = f_{q_0}(x_1) > \sup_{f \in K_1 - \overline{V}(f_{q_0})} f(x_1).$$

Отсюда вытекает (так как $-\overline{E}_0 \subset -K_{\overline{Q}}$)

$$x_1(q_0) > \sup_{f \in \pm E_0} f(x_1) = \sup_{q \in E_0} |x_1(q)|.$$

С другой стороны, беря прежде выбранный элемент $\varphi_1 \in \pm \overline{E}_0$, для x_1 имеем $\sup\limits_{q \in E_0} |x_1(q)| = \varphi_1(x_1) \geqslant x_1(q_0)$.

Полученное противоречие доказывает, что $\overline{E}_0$ плотно в $\overline{E}$, и теорема доказана *.

Средним значением на R_Q называется линейный неотрицательный функционал на пространстве R_Q, который равен единице на элементе, равном тождественно единице. Аналогично определяется среднее на пространстве $C_{\overline{Q}}$. По отношению к достижимым точкам имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если элемент q_0 является достижимой точкой функционального компакта $\tilde{Q}$ и f_{q_0} есть среднее значение на R_Q, отвечающее элементу q_0, то элемент f_{q_0} допускает единственное расширение до среднего на пространстве $C_{\overline{Q}}$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на два предложения, которые последовательно легко проверяются.

а) Если q_0 есть достижимая точка на $\tilde{Q}$, которая достигает строгого максимума на элементе $x_0 \in R$, то из равенства $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = x_0(q_0)$, где $\{f_n\} \subset K_{\overline{Q}}$, вытекает, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = x(q_0)$ при всех $x \in R$.

б) Если q_0 есть достижимая точка $\tilde{Q}$ и $V(q_0)$ — окрестность q_0 в $\tilde{Q}$, то можно указать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы из неравенства $|x_0(q) - x_0(q_0)| < \varepsilon$ вытекало $q \in V(q_0)$.

---

* Доказанная теорема является усилением теоремы об экстремальных точках в случае сепарабельного пространства ([1, 7]).

Если $\overline{f}_{q_0}$ есть расширение f_{q_0} до среднего на $C_{\widetilde{Q}}$ и $\sigma_0(I)$ является функцией множества, отвечающей элементу $\overline{f}_{q_0}$ по теореме А. Маркова (6), то имеем:

$$1 = x_0(q_0) = \int\limits_{V(q_0)} x_0(q)\, d\sigma_0(I_q) + \int\limits_{\widetilde{Q} - V(q_0)} x_0(q)\, d\sigma_0(I_q) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_0(V(q_0)) + (1-\varepsilon)[1 - \sigma_0(V(q_0))];$$

ибо, когда $q \in \widetilde{Q} - V(q_0)$, то $x_0(q) \leqslant 1 - \varepsilon$.

Из последнего неравенства вытекает, что $\sigma_0(V(q_0)) \geqslant 1$, и, значит, $\sigma_0(V(q_0)) = 1$ для любой окрестности точки q_0.

В силу полной аддитивности $\sigma_0(I)$ на борелевской системе множеств в $\widetilde{Q}$ мы заключаем: $\sigma_0(\{q_0\}) = 1$, где $\{q_0\}$ — множество, состоящее из одной точки q_0.

Из полученного следует, что $\overline{f}_{q_0}(x) = x(q_0)$ при всех $x \in C_{\widetilde{Q}}$.

3. Достижимые точки кольцевой границы. Пусть R — нормированное кольцо со счетным числом образующих и $\mathfrak{M}$ — множество его максимальных идеалов с обычной топологией (Тихонова). Так как пространство R является сепарабельным, то $\mathfrak{M}$ может рассматриваться как функциональный компакт, в котором системой определяющих функций является совокупность всех полиномов от образующих в кольце R. T-границей $\mathfrak{M}$ является кольцевая граница (1).

Достижимой точкой $\mathfrak{M}$ будет такая, на которой вещественная часть некоторого полинома от образующих кольца достигает строгого максимума. Из теоремы 1 непосредственно вытекает:

Теорема 1 а. *Множество достижимых максимальных идеалов нормированного кольца со счетным числом образующих плотно в кольцевой границе.*

Из свойств кольца вытекает, что для достижимых точек $\mathfrak{M}$ верна следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть M_0 — достижимая точка множества $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов нормированного кольца R со счетным числом образующих и $\mathfrak{M}_1$ есть замкнутое (в топологии Тихонова) подмножество множества $\mathfrak{M}$, не содержащее точки M_0. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать элемент $x \in R$ так, чтобы:*

$$0 \leqslant \operatorname{Re} x(M) \leqslant |x(M)| \leqslant \operatorname{Re} x(M_0) = 1 \quad (M \in \mathfrak{M}), \operatorname{Re} x(M) \leqslant \varepsilon \quad (M \in \mathfrak{M}_1).$$

Из этой теоремы вытекает также следующая:

Теорема 4. *Пусть выполняются условия предыдущей теоремы и пространство R заменено отвечающим ему вещественным пространством R_b, а максимальные идеалы M заменены отвечающими им элементами M^b пространства R_b^*, сопряженного к R_b. Тогда расстояние в R_b^* от элемента M_0^b до линейной оболочки множества $\mathfrak{M}_1^b$ (порожденного множеством $\mathfrak{M}_1$) равно единице.*

Одесский электротехнический
институт связи

Поступило
22 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Мильман, ДАН, **57**, № 2 (1947). [2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [3] L. Alaogly, Bull. Am. Math. Soc., No. 3 (1938). [4] M. Krein and V. Šmulian, Ann. Math., **41**, No. 3 (1940). [5] S. Mazur, Studia Math., 4 (1934). [6] А. Марков, Матем. сб., 4 (46): 1 (1938). [7] M. Krein and D. Milman, Studia Math., **9** (1940).