Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 6

МАТЕМАТИКА

Д. М. ЗАГАДСКИЙ

АНАЛОГ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 XII 1947)

В настоящей статье мы рассматриваем один метод последовательных приближений для решения нелинейных интегральных уравнений типа

$$\varphi(x)=\int_a^b K[x, y, \varphi(y)]\,dy \tag{1}$$

и даем теорему существования решения для них при некоторых, отличных от имеющихся, условиях.

Изложим общую идею метода.

Пусть $\varphi_0(x)$—непрерывная функция. Возьмем линейное интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\int_a^b K[x, y, \varphi_{k-1}(y)]\,dy+$$
$$+\int_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_{k-1}(y)]\,[\varphi(y)-\varphi_{k-1}(y)]\,dy \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Его решение $\varphi_k(x)$ рассматриваем как k-е приближение для уравнения (1). При выполнении некоторых приводимых ниже условий уравнение (2) всегда имеет решение и последовательность $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$ равномерно сходится к решеиию $\varphi^*(x)$ уравнения (1), существование которого доказывается прямым методом.

Положим

$$\varepsilon_k(x)\equiv\int_a^b K[x, y, \varphi_k(y)]\,dy-\varphi_k(x) \quad (k=0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

$$\varepsilon_k=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|\varepsilon_k(x)| \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Теорема 1. *Если в области $a\leqslant x,\ y\leqslant b,\ |z|\leqslant L$, где L—константа, определяемая ниже:*

1) *функции* $K(x, y, z)$ *и* $K'_z(x, y, z)$ *непрерывны по* x, y *и* z, *а* $K''_{z^2}(x, y, z)$ *определена и для всех* x, y *и* z $|K''_{z^2}(x, y, z)| \leqslant P$, $P = \mathrm{const}$;

2) *существует резольвента* $T_0(x, y)$ *ядра* $K'_\varphi[x, y, \varphi_0(y)]$, *где* $\varphi_0(x)$ *непрерывна в* $[a, b]$ *и* $|\varphi_0(x)| \leqslant L$, *причем* $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \int\limits_a^b |T_0(x, y)|\, dy = B$, *где* B — *константа*;

3) $\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{10\delta(1+B)}$, *где*

$$\delta = P(1 + B)(b - a), \tag{5}$$

то уравнение (2) *для каждого значения* k *имеет единственное и непрерывное решение* $\varphi_k(x)$, *причем при любом* k

$$|\varphi_k(x) - \varphi_0(x)| \leqslant h, \tag{6}$$

где

$$h = \frac{1 - \sqrt{1 - 10\delta\varepsilon_0(1+B)}}{5\delta}. \tag{7}$$

Наметим ход доказательства. По определению, $\varphi_1(x)$ находится как решение уравнения

$$\varphi(x) = \int\limits_a^b K[x, y, \varphi_0(y)]\, dy + \int\limits_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_0(y)][\varphi(y) - \varphi_0(y)]\, dy. \tag{8}$$

В силу условий 1) и 2) это решение будет единственным и непрерывным. Вычитая в (8) из обеих частей по $\varphi_0(x)$ и учитывая (3), получим

$$\varphi(x) - \varphi_0(x) = \varepsilon_0(x) + \int\limits_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_0(y)][\varphi(y) - \varphi_0(y)]\, dy,$$

откуда

$$\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \varepsilon_0(x) + \int\limits_a^b T_0(x, y)\, \varepsilon_0(y)\, dy.$$

В силу (4) и условия 2) получаем

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant \varepsilon_0(1 + B).$$

С помощью (7) и условия 3) находим, что $\varepsilon_0(1 + B) \leqslant h$ и, следовательно,

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant h. \tag{9}$$

Итак, для $k = 1$ теорема справедлива.

Предполагая далее неравенство (6) доказанным для $k=1, 2, \ldots, (n-1)$, устанавливаем способом от противного, что уравнение

$$\varphi(x) - \varphi_{n-1}(x) = \int_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_{n-1}(y)][\varphi(y) - \varphi_{n-1}(y)]\,dy$$

имеет только нулевое решение и, следовательно, значение $\lambda = 1$ не является собственным для ядра $K'_\varphi[x, y, \varphi_{n-1}(y)]$, а значит уравнение

$$\varphi(x) = \int_a^b K[x, y, \varphi_{n-1}(y)]\,dy + \int_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_{n-1}(y)][\varphi(y) - \varphi_{n-1}(y)]\,dy$$

имеет единственное и непрерывное решение, которым по определению является $\varphi_n(x)$. Аналогично тому, как было установлено неравенство (9) с помощью (7) и условия 3), доказывается, что

$$|\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| \leqslant h,$$

и теорема доказана.

Замечание. Из (6) следует, что $|\varphi_k(x)| \leqslant |\varphi_0(x)| + h$ $(k=1, 2, \ldots)$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \varphi^*(x)$, то и $|\varphi^*(x)| \leqslant |\varphi_0(x)| + h$. Отсюда следует, что за константу L можно принять выражение

$$L = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_0(x)| + h. \tag{10}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *уравнение* (1) *имеет непрерывное решение* $\varphi^*(x)$ *в области* $|\varphi(x)| \leqslant L$, *являющееся пределом равномерно сходящейся последовательности найденных выше функций* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$ *Скорость сходимости характеризуется оценкой*

$$\varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2} P(b-a) h^2 \left[\frac{\delta h}{2(1-\delta h)}\right]^{2^k - 2} \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{11}$$

В области $a \leqslant x \leqslant b$, $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leqslant h$ *это решение единственно.*

Для доказательства введем величину h_k:

$$h_k = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Очевидно, что $h_1 \leqslant h$. Далее из равенств

$$\varepsilon_1(x) = \int_a^b K[x, y, \varphi_1(y)]\,dy - \varphi_1(x),$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K[x, y, \varphi_0(y)]\,dy + \int_a^b K'_\varphi[x, y, \varphi_0(y)][\varphi_1(y) - \varphi_0(y)]\,dy$$

находим, что

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{2}\int_a^b K''_{\varphi^2}[x, y, \tilde{\varphi}][\varphi_1(y) - \varphi_0(y)]^2\,dy,$$

где $\varphi_0(x) \gtrless \tilde{\varphi} \gtrless \varphi_1(x)$.

Отсюда, в силу (9), (4) и условия 1), имеем

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2} P(b-a) h^2.$$

Из (2) при $k=2$ находим

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = f_1(x) + \int_a^b K'_\varphi [x, y, \varphi_0(y)] [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] \, dy,$$

где $f_1(x) = \varepsilon_1(x) + \int_a^b K''_{\varphi^2}(x, y, \bar{\varphi}) [\varphi_1(y) - \varphi_0(y)] [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)] \, dy$

и $\varphi_0(x) \gtrless \bar{\varphi} \gtrless \varphi_1(x)$. Отсюда

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = f_1(x) + \int_a^b T_0(x, y) f_1(y) \, dy, \quad h_2 \leqslant \frac{\varepsilon_1 (1+B)}{1 - \delta h}.$$

Аналогично, пользуясь методом индукции, находим, что

$$\varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2} P(b-a) h^2 \left[\frac{\delta h}{2(1-\delta h)}\right]^{2^k - 2},$$

$$h_k \leqslant h \left[\frac{\delta h}{2(1-\delta h)}\right]^{2^{k-1}-1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, что

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0. \tag{13}$$

Опираясь на оценку для h_k, устанавливаем равномерную сходимость ряда $\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \ldots + [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] + \ldots$, откуда вытекает непрерывность его суммы $\varphi^*(x)$. Пользуясь (13), убеждаемся, что $\varphi^*(x)$ удовлетворяет уравнению (1).

Пользуясь условиями 1), 2) и (7), легко доказывается (методом от противного) единственность решения в „h-полосе“ $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leqslant h$.

Замечание. Предполагая существование решения $\varphi^*(x)$ уравнения (1), можно улучшить оценку скорости сходимости. Именно, если

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi^*(x) - \varphi_k(x)| = \alpha_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

то

$$\alpha_k \leqslant \frac{\delta h^2}{2} \left(\frac{\delta h}{2\sqrt{1-\delta}}\right)^{2^k - 2}.$$

На доказательстве этого мы здесь и останавливаемся.

Алма-Атинский государственный
педагогический институт им. Абая

Поступило
24 XII 1947