Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

АСТРОНОМИЯ

Д. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКИЙ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ С БОЛЬШИМИ ПЕРИОДАМИ В ЗВЕЗДАХ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 18 V 1948)

Как было отмечено нами [1], предложенная нами схема термокинетических колебаний, если ее применить к процессам выделения звездной энергии, приводит к колебательному изменению температуры и состава звезды во времени с очень большими периодами, далеко превосходящими возможное время нашего наблюдения.

Сейчас мы покажем, что для этого вовсе не требуются какие-либо новые гипотетические процессы образования тяжелых ядер, как мы полагали раньше. Оказывается, что самый простой и естественный механизм выделения звездной энергии, предложенный уже давно Критчфильдом и Бете [2], в точности удовлетворяет требованиям нашей термокинетической схемы.

Этот процесс можно записать так:

$$2\mathrm{H}^1 \to \mathrm{H}^2 \to \mathrm{He}^3 + Q_1,$$
$$\mathrm{He}^3 + \mathrm{He}^4 \to \mathrm{Be}^7 \to \mathrm{Li}^7 \to 2\mathrm{He}^4 + Q_2.$$

Обозначив температуру в центре звезды через T и весовые относительные концентрации протонов, α-частиц и ядер He^3 в той же точке через n_1, n_4, n_3 соответственно, получим для зависимости n_3 и T от времени t' систему кинетических уравнений:

$$\frac{dn_3}{dt'} = P_1\rho n_1^2 - P_2\rho n_4 n_3, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt'} = \frac{Q_1}{3c} P_1\rho n_1^2 + \frac{Q_2}{3c} P_2\rho n_4 n_3 - AT^{15/2}, \tag{2}$$

где c — теплоемкость, ρ — плотность, Q — тепловые эффекты, P — константы скоростей ядерных реакций, A — постоянная теплоотвода. Значения всех величин относятся к условиям близ центра звезды, так как именно в этой области в основном и протекают ядерные реакции.

Перейдя к безразмерным величинам, получим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F_1(y) - F_2(y)\,x, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma\,[F_1(y) + \alpha F_2(y)\,x - (1+\alpha)\,y^{15/2}], \tag{4}$$

где F — функция Аткинсона:

$$F = y^{-2/3} e^{+\tau[1 - y^{-1/3}]};$$

безразмерные переменные:

$$x = \frac{P_2^0}{P_1^0} \frac{n_4}{n_1^2} n_3, \quad y = \frac{T}{T_0}, \quad t = P_2^0 \rho n_4 t';$$

безразмерные параметры:

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_1} = 2{,}71, \qquad \gamma = \frac{Q_1}{3cT_0} \frac{P_1^0}{P_2^0} \frac{n_1^2}{n_4}.$$

Остальные обозначения — согласно Бете [3]; оттуда же взяты и численные значения констант. Значения P_1^0 и P_2^0 относятся к равновесной температуре в центре звезды T_0.

То, что решения системы (1), (2) имеют колебательный характер, легко показать элементарным анализом свойств положения равновесия.

Для малых отклонений от положения равновесия, положив

$$x = 1 + \xi, \qquad y = 1 + \eta$$

и опуская члены порядка выше первого в ξ и η, получим линеаризованные уравнения:

$$\frac{d\xi}{dt} = -a\eta - \xi, \tag{5}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma\,[b\eta + \alpha\xi], \tag{6}$$

где

$$a = \frac{\tau_2 - \tau_1}{3}, \qquad b = \frac{\tau_1 - 2}{3} + \alpha\,\frac{\tau_2 - 2}{3} - \frac{15}{2}(1 + \alpha).$$

Ищем решения системы (5), (6) в виде:

$$x = Ae^{\omega t}, \qquad y = Be^{\omega t};$$

тогда

$$\omega = \frac{1}{2}(\gamma b - 1) \pm \sqrt{\frac{(\gamma b + 1)^2}{4} - \gamma\alpha\, a}.$$

Если вещественная часть ω положительна, а мнимая не равна нулю, то положение равновесия будет неустойчивым фокусом, т. е. мы получим малые колебания с нарастающей амплитудой.

Для температуры $T_0 = 2 \cdot 10^7\,^\circ$K это имеет место при значениях γ от 0,06 до 0,32. При меньших значениях γ положение равновесия будет устойчивым фокусом, т. е. будут иметь место затухающие колебания. При значениях γ больше указанных положение равновесия будет неустойчивым узлом. Вопрос о характере процесса в этой области требует специального исследования. В области значений γ, где положение равновесия неустойчиво, есть основания ожидать возникновения предельного цикла (автоколебания).

Не вдаваясь здесь в математический анализ, приведем результаты графического интегрирования системы (3), (4) для $T_0 = 2 \cdot 10^7\,^\circ$K и $\gamma = 0{,}105$. Цикл был построен по методу изоклин как предел интегральных кривых, исходящих изнутри и снаружи.

На рис. 1 показан цикл в координатах $\ln x$, y и изоклины $dx/dt = 0$ и $dy/dt = 0$.

На рис. 2 показана построенная по этому циклу зависимость x и y от безразмерного времени t.

При численных расчетах мы пренебрегали теплоемкостью излучения, учет которой может ограничить амплитуду колебаний в сторону высоких температур.

Заметим, что по ориентировочной оценке значения γ для реальных звезд как раз такого порядка, что, во всяком случае, наиболее бога-

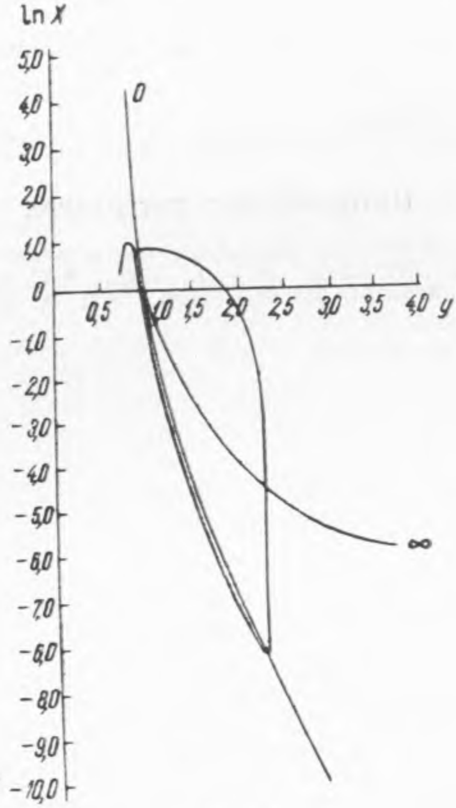

Рис. 1

тые водородом звезды должны оказаться в области колебательного режима.

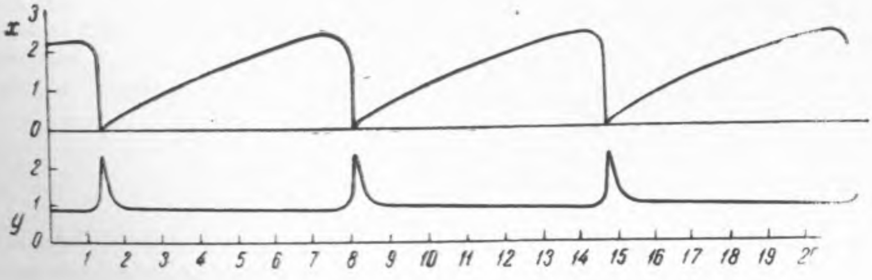

Рис. 2

Как из (7), так и из результатов численного интегрирования видно, что безразмерная круговая частота колебаний близка к 1. Отсюда период колебаний порядка $2\pi/P_2^0 \rho n_4 \approx 10^8$ лет. Обычно считают, что возраст звезд не менее $2 \cdot 10^9$ лет. Следовательно, за время своего существования они успели уже проделать не менее 20 циклов.

Развитые представления могут оказаться полезными для решения некоторых вопросов астрофизики. Вместо того, чтобы представлять состояния различных звезд как разные стадии одного и того же эволюционного ряда, мы можем считать их находящимися в разных фазах колебательного процесса, частота которого может несколько различаться хотя бы в силу различия в массах и случайных колебаний в химическом составе звезд.

Благодарю К. А. Семендяева и И. Е. Сальникова за помощь в математических вопросах.

Институт химической физики
Академии Наук СССР

Поступило
24 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, гл. X, изд. АН СССР, М. — Л., 1947. [2] C. L. Critchfield and N. A. Bethe, Phys. Rev., **54**, 248, 862 (1938). [3] H. A. Bethe, Phys. Rev., **55**, 434 (1939).