Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПОНЕНТ НАПРЯЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Напряженное состояние в точке определяется шестью компонентами: σ_x, σ_y, σ_z, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ тензора напряжения. Эти компоненты могут быть выражены через три главных нормальных напряжения σ_1, σ_2, σ_3 по известным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i l_i^2, & \tau_{yz} &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i m_i n_i, \\ \sigma_y &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i m_i^2, & \tau_{zx} &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i n_i l_i, \\ \sigma_z &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i n_i^2, & \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^{3} \sigma_i l_i m_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Через l_i, m_i, n_i обозначены направляющие косинусы углов между главной осью i и координатными осями x, y, z. Они связаны между собой равенствами

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} l_i^2 &= 1, & \sum_{i=1}^{3} m_i n_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{3} m_i^2 &= 1, & \sum_{i=1}^{3} n_i l_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{3} n_i^2 &= 1, & \sum_{i=1}^{3} l_i m_i &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Направляющие косинусы могут быть выражены через три угла φ, ψ, θ, как это обычно делается в теории движения абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\sin\psi\sin\varphi\cos\theta + \cos\psi\cos\varphi, \\ l_2 &= -\sin\psi\cos\varphi\cos\theta - \cos\psi\sin\varphi, \\ l_3 &= +\sin\psi\sin\theta; \\ m_1 &= +\cos\psi\sin\varphi\cos\theta + \sin\psi\cos\varphi, \\ m_2 &= +\cos\psi\cos\varphi\cos\theta - \sin\psi\sin\varphi, \\ m_3 &= -\cos\psi\sin\theta; \\ n_1 &= \sin\varphi\sin\theta, \\ n_2 &= \cos\varphi\sin\theta, \\ n_3 &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Приведенная система углов, как известно, не является единственной; возможны и другие системы.

Введем в рассмотрение среднее нормальное напряжение σ и интенсивность касательного напряжения S:

$$3\sigma = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i, \qquad 2S^2 = \sum_{i=1}^{3} (\sigma_i - \sigma)^2. \tag{4}$$

Главные нормальные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 на основании равенства (4) могут быть выражены через S, σ и новую функцию ω:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \sigma + \frac{2}{\sqrt{3}} S \cos\left(\omega \mp \frac{\pi}{3}\right), \qquad \sigma_3 = \sigma - \frac{2}{\sqrt{3}} S \cos\omega. \tag{5}$$

Вместо σ может быть введено

$$2\Lambda = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{6}$$

Главные нормальные напряжения, в силу равенств (5) и (6), принимают вид

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \Lambda \pm S\sin\omega, \qquad \sigma_3 = \Lambda - \sqrt{3}\, S\cos\omega. \tag{7}$$

Компоненты напряжения в силу уравнений (1), (2) и (7) будут:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \Lambda + S\left\{\sin\omega\,(l_1^2 - l_2^2) - \sqrt{3}\cos\omega\, l_3^2\right\},\\
\sigma_y &= \Lambda + S\left\{\sin\omega\,(m_1^2 - m_2^2) - \sqrt{3}\cos\omega\, m_3^2\right\},\\
\sigma_z &= \Lambda + S\left\{\sin\omega\,(n_1^2 - n_2^2) - \sqrt{3}\cos\omega\, n_3^2\right\},\\
\tau_{yz} &= S\{\sin\omega\,(m_1 n_1 - m_2 n_2) - \sqrt{3}\cos\omega\, m_3 n_3\},\\
\tau_{zx} &= S\{\sin\omega\,(n_1 l_1 - n_2 l_2) - \sqrt{3}\cos\omega\, n_3 l_3\},\\
\tau_{xy} &= S\{\sin\omega\,(l_1 m_1 - l_2 m_2) - \sqrt{3}\cos\omega\, l_3 m_3\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Формулы (3) и (8) дают выражение шести компонент σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy} через шесть новых величин S, Λ, ω, φ, ψ, θ.

Вместо величины Λ иногда удобно пользоваться величиной

$$\lambda = \frac{\Lambda}{S}.$$

Для определенности мы пользовались прямоугольной системой прямолинейных координат xyz. Однако формулы (1)—(8) сохраняют тот же вид и для других ортогональных систем криволинейных координат.

При пользовании цилиндрическими $r\theta z$ или сферическими $r\theta\varphi$ координатами следует всюду буквы x, y, z заменять соответственно буквами r, θ, z или буквами r, θ, φ.

Рассмотрим различные частные виды напряженных состояний.

1. Плоское деформированное состояние. В прямоугольной системе координат xyz компоненты $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, а компоненты σ_x, σ_y, σ_z и τ_{xy} выражаются формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = S(\lambda \pm \sin\omega\cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = S\sin\omega\sin 2\varphi,$$
$$\sigma_z = S(\lambda - \sqrt{3}\cos\omega), \tag{9}$$

следующими из формул (3) и (8) при $\psi = \theta = 0$.

Полученные выражения могут быть упрощены, если $2\sigma_z = \sigma_x + \sigma_y$, как это обычно имеет место в теории пластичности.

Компоненты σ_x, σ_y и τ_{xy} выражаются при этом формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = S(\lambda \pm \cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = S \sin 2\varphi, \tag{10}$$

вытекающими из формул (9) при $\omega = \pi/2$.

2. Плоское напряженное состояние. В прямоугольной системе координат xyz, ось z которой перпендикулярна плоскости пластинки, компоненты $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, компоненты σ_x, σ_y и τ_{xy} выражаются формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = S(\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = S \sin\omega \sin 2\varphi, \tag{11}$$

полученными из формул (3) и (8) при $\psi = \theta = 0$ и $\lambda = \sqrt{3}\cos\omega$.

3. Кручение призматических стержней. В прямоугольной системе координат xyz, ось z которой параллельна образующим, компоненты $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, а компоненты τ_{xz} и τ_{yz} выражаются формулами

$$\tau_{xz} = -S\sin\psi, \qquad \tau_{yz} = +S\cos\psi, \tag{12}$$

найденными из формул (3) и (8) при $\varphi = 0$, $\theta = \pi/4$, $\Lambda = S/2$, $\omega = -\pi/6$.

4. Осесимметричное плоское деформированное состояние полого кругового цилиндра. В цилиндрической системе координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью цилиндра, компоненты $\tau_{\theta z} = \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0$, а компоненты σ_r, σ_θ, σ_z определяются формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = S(\lambda \pm \sin\omega), \qquad \sigma_z = S(\lambda - \sqrt{3}\cos\omega), \tag{13}$$

полученными из формул (3) и (8) при $\varphi = \psi = \theta = 0$.

5. Осесимметричное плоское напряженное состояние круговой пластинки. В цилиндрических координатах $r\theta z$, ось z которых перпендикулярна плоскости пластинки и проходит через ее центр, компоненты $\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = \tau_{r\theta} = 0$, а компоненты σ_r, σ_θ даются формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r \\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\} = 2S\cos\left(\omega \mp \frac{\pi}{6}\right), \tag{14}$$

следующими из формул (3) и (8) при $\varphi = \psi = \theta = 0$ и $\lambda = \sqrt{3}\cos\omega$.

Полученные выражения (9) — (14) аналогичны выражениям, широко применяемым в нашей монографии ([1]) при решении различных задач пластического равновесия.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
17 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Теория пластичности, изд. АН СССР, 1946.