Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. СОБОЛЬ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 V 1948)

В настоящей статье рассматриваются уравнения

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\, y^{(n-j)} \tag{1}$$

и

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\, y^{(n-j)} + B(x), \tag{2}$$

все коэффициенты которых непрерывны на $[a, \infty]$.

§ 1. Предположим, что при $1 \leqslant j \leqslant n$ интегралы

$$\int_a^\infty |A_j(x)|\, x^{j-1} dx < +\infty. \tag{A}$$

Обозначим сумму их остатков через $\psi(x)$.

Теорема. *Уравнение* (1) *при условии* (A) *имеет фундаментальную систему решений вида*

$$y_s(x) = x^s + O\left(\int_a^x \ldots \int_a^t \psi(t)\, dt^s\right),$$

где $0 \leqslant s \leqslant n-1$.

Доказательство. Будем в дальнейшем считать $a > 1$ столь большим, чтобы

$$\psi(a) = q < 1. \tag{3}$$

Заменим уравнение (1) уравнением

$$y^{(n)} = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\, y^{(n-j)},$$

решение которого будем искать в виде ряда по степеням λ:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k y_k(x). \tag{4}$$

Подставляя этот формальный ряд в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим для определения $y_k(x)$ дифференциальные рекуррентные уравнения:

$$y_0^{(n)} = 0, \quad y_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} A_j(x)\, y_{k-1}^{(n-j)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Будем строить решение номер s фундаментальной системы. В течение всего доказательства индексы при y будут означать номера приближений к решению $y_s(x)$, которое будем обозначать просто через $y(x)$.

Пусть

$$y_0=x^s, \quad y_k=(-1)^{n-s}\underbrace{\int_a^x\dots\int_a^t}_{s}\underbrace{\int_t^\infty\dots\int_t^\infty}_{n-s} y_k^{(n)}(t)\,dt^n, \quad k=1,2,\dots \tag{6}$$

Оценим первое приближение. Из (5) и (6) получим:

$$y_1^{(n)}=\frac{s!}{x^{n-s-1}}\sum_{j=n-s}^{n} A_j(x)\frac{x^{j-1}}{(s+j-n)!}, \tag{7}$$

откуда

$$|y_1^{(n)}|\leqslant\frac{s!}{x^{n-s-1}}\sum_{j=n-s}^{n}|A_j(x)|\,x^{j-1}\leqslant -s!\frac{\psi'(x)}{x^{n-s-1}}. \tag{8}$$

Функцию $y_1(x)$ оценим с помощью формулы Коши:

$$|y_1(x)|\leqslant\int_a^x\dots\int_a^t\int_t^\infty\frac{(z-t)^{n-s-1}}{(n-s-1)!}|y_1^{(n)}(z)|\,dz\,dt^s.$$

Используя (8), получим, что

$$|y_1(x)|\leqslant s!\int_a^x\dots\int_a^t\psi(t)\,dt^s$$

или что

$$y_1(x)=O\left(\int_a^x\dots\int_a^t\psi(t)\,dt^s\right).$$

Для доказательства сходимости ряда (4) при $\lambda=1$ оценим ряд из n-х производных. По индукции нетрудно показать, что

$$|y_k^{(n)}|\leqslant -s!\frac{\psi'(x)}{x^{n-s-1}}q^{k-1}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}|y_k^{(n)}|\leqslant -s!\frac{\psi'(x)}{x^{n-s-1}}\frac{1}{1-q}, \tag{9}$$

и так как (9) имеет тот же порядок, что и (8), то теорема доказана.

Замечание 1. Из соотношения (9) можно получить также оценки для производных всех решений. Например, для $(n-1)$-й производной:

$$y_s^{(n-1)}=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^s)+O\left(\frac{\psi(x)}{x^{n-s-1}}\right). \tag{10}$$

Замечание 2. Если $\int_a^\infty x^{k-1}\psi(x)\,dx<\infty$, то k внутренних интегралов $\int_a^t$ в оценке теоремы можно заменить на $\int_t^\infty$.

Следствием доказанной теоремы является так называемая теорема Späth'a (см. ([1])): при $n=2$, $A_1(x)\equiv 0$, $A_2(x)=O(x^{-2-\alpha})$, где $\alpha>0$, уравнение имеет фундаментальную систему решений вида: $y_1=1+O(x^{-\alpha})$, $y_2=x+O(x^{1-\alpha})$ при $\alpha\neq 1$ и $y_2=x+O(\ln x)$ при $\alpha=1$.

§ 2. Для построения решения $Y(x)$ уравнения (2) заменим его уравнением:

$$y^{(n)}=\lambda\sum_{j=1}^{n}A_j(x)\,y^{(n-j)}+B(x)$$

и будем искать решение в виде ряда (4). Для определения $y_k(x)$ получим уравнения:

$$y_0^{(n)}=B(x),\qquad y_k^{(n)}=\sum_{j=1}^{n}A_j(x)\,y_{k-1}^{(n-j)},\qquad k=1, 2, \ldots \tag{11}$$

Будем требовать, чтобы

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant\infty}\left|\int_a^x B(t)\,dt\right|=B<+\infty \tag{B}$$

или

$$\left|\int_a^\infty t^{n-1}B(t)\,dt\right|<+\infty. \tag{B'}$$

Докажем, что

1°. Уравнение (2) при условиях (A) и (B) имеет решение $Y(x)$, для которого $\lim\limits_{x\to\infty}Y^{(n-1)}(x)=0$

2°. Уравнение (2) при условиях (A) и (B′) имеет решение $Y(x)$, для которого $\lim\limits_{x\to\infty}Y(x)=0$.

Для доказательства 1° возьмем интегралы соотношений (11) в виде:

$$y_k(x)=-\int_a^x\ldots\int_a^t\int_t^\infty y_k^{(n)}(t)\,dt^n,\qquad k=0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Получив, что

$$|y_1^{(n)}|\leqslant -B\psi'(x),$$

можем дальше оценок не проводить, так как последняя и (12) при $k>0$ совпадают с (8) и (6) при $s=n-1$.

Учитывая (10), получаем:

$$Y^{(n-1)}(x)=-\int_x^\infty B(t)\,dt+O(\psi(x)).$$

При доказательстве 2° удобно использовать следующую лемму, которую я доказывать не буду.

Лемма. *Пусть $B(x)$ непрерывна на $[a,\infty)$; если сходится $\int_a^\infty t^\alpha B(t)\,dt$ при $\alpha\geqslant 0$, то*:

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha\int_x^\infty B(t)\,dt=0.$$

Переходя к доказательству 2°, возьмем интегралы уравнений (11) в виде:

$$y_k = (-1)^n \int_x^\infty \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} y_k^{(n)}(t)\, dt, \quad k=0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

После оценки $|y_1^{(n)}|$ доказательство сведется к случаю $s=0$ из § 1, и получим, что

$$Y(x) = (-1)^n \int_x^\infty \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} B(t)\, dt + O(\psi(x)),$$

чем утверждение 2° доказано.

Следствием 1° и замечания 1 является теорема Haupt'a — Wilkins'a ((2), стр. 289, (3)): в уравнении (2), при условиях (A) и (B), для любого решения $y(x)$ существует конечный $\lim\limits_{x\to\infty} y^{(n-1)}(x)$ (если $1 \leqslant r \leqslant n-1$, то для любой постоянной c найдется решение $y(x)$ такое, что $\lim\limits_{x\to\infty} y^{(r)} = c$).

§ 3. Предположим, что при $0 \leqslant s \leqslant n-1$ интегралы

$$\int_a^\infty x^s \left| \sum_{j=n-s}^{n} A_j(x) \frac{x^{j-1}}{(s-n+j)!} \right| dx < +\infty. \tag{C}$$

Обозначим их остатки через $\varphi_s(x)$.

Теорема. *Уравнение* (1) *при условии* (C) *имеет фундаментальную систему решений вида:*

$$y_s(x) = x^s + O(\varphi_s(x)),$$

где $0 \leqslant s \leqslant n-1$.

Доказательство будем вести так же, как и в § 1. В качестве интегралов (5) возьмем:

$$y_0 = x^s, \quad y_k = (-1)^n \int_x^\infty \ldots \int_t^\infty y_k^{(n)}(t)\, dt^n, \quad k=1, 2, \ldots \tag{14}$$

Для оценки $y_1(x)$ получим соотношение (7), откуда

$$|y_1^{(n)}| \leqslant -s! \frac{\varphi_s'(x)}{x^{n-1}}. \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15) с (6) и (8), легко видеть, что доказательство сводится к рассуждениям § 1 при $s=0$.

Из этой теоремы и пункта 2° (§ 2) получаем для неоднородного уравнения теорему:

Теорема. *Все решения уравнения* (2) *при условиях* (C) *и* (B′) *асимптотически приближаются к полиномам степени* $\leqslant n-1$.

При $n=2$ — это теорема Haupt'a о существовании асимптот ((2), стр. 212).

Поступило
28 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1945, стр. 246. [2] O. Haupt, Math. Z., **48** (2) (1942). [3] J. E. Wilkins, Bull. Am. Math. Ass., **9** (4), 388 (1943).