Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. РАБИНОВИЧ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМКНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЯДЕР

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 V 1948)

Рассмотрим ядро $K(x, y)$, определенное в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и являющееся суммой конечного числа слагаемых вида $|x-y|^\alpha H(x, y)$, $|x-y|^\alpha \ln|x-y| H(x, y)$, $\delta(x, y)|x-y|^\alpha H(x, y)$, $\delta(x, y)|x-y|^\alpha \ln|x-y| H(x, y)$, где $\delta(x, y)=1$, если $y<x$ и $\delta(x, y)=-1$, если $y>x$, а $H(x, y)$ обозначает функцию, непрерывную вместе со своими частными производными сколь угодно высокого порядка во всем основном квадрате.

Частные производные такого ядра имеют такой же вид и, начиная с некоторого порядка, становятся разрывными или обращаются в бесконечность вдоль диагонали $y=x$, причем порядок обращения в бесконечность повышается при дальнейшем дифференцировании.

Если $K(x, y)$ интегрируемо, то функция

$$k(x)=\int_a^b K(x, y)\, dy = \int_0^{x-a} K(x, x-y)\, dy + \int_0^{b-x} K(x, x+y)\, dy$$

непрерывна в отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и имеет во всех внутренних точках промежутка (a, b) непрерывные производные сколь угодно высокого порядка, тогда как при $x=a$ и $x=b$ производные достаточно высокого порядка функции $k(x)$ могут обратиться в бесконечность.

То же самое относится и к функциям

$$k_1(x)=\int_a^b (y-x)\frac{\partial K}{\partial x}\, dy.$$

Легко убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма. *Если $u(x)$ удовлетворяет условию Липшица, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} = \frac{H(x, y)}{|x-y|^\alpha}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, а $H(x, y)$ ограничено, то*

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy =$$

$$=\int_a^b \frac{\partial^m K}{\partial x^m}[u(y)-u(x)]\, dy + u(x)\frac{d^m}{dx^m}\int_a^b K(x, y)\, dy. \qquad (1)$$

Если $u(x)$ имеет производную, удовлетворяющую условию Липшица, а $\frac{\partial^{m-1} K}{\partial x^{m-1}} = \frac{H_1(x, y)}{|x-y|^{\alpha}}$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} = \frac{H_2(x, y)}{|x-y|^{\alpha+1}}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $H_1(x, y)$ и $H_2(x,y)$ ограничены, то

$$\frac{d^m}{dx^m}\int_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = \int_a^b \frac{d^m K}{dx^m}\,[u(y) - u(x) - (y-x)\, u'(x)]\, dy +$$

$$+ u''(x) \frac{d}{dx}\int_a^b \left(\frac{\partial^{m-2} K}{\partial x^{m-2}} - (x-y)\frac{\partial^{m-1} K}{\partial x^{m-1}}\right) dy +$$

$$+ u(x)\frac{d^m}{dx^m}\int_a^b K(x, y)\, dy. \qquad (2)$$

Примечание. Если $K(x, y)$, $\frac{\partial K}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{m-2} K}{\partial x^{m-2}}$ непрерывны, а $\frac{\partial^{m-1} K}{\partial x^{m-1}}$ совершает скачок при переходе через диагональ $y=x$, то формула (1) имеет место для любой непрерывной функции $u(x)$.

Допустим теперь, что для сингулярного ядра $K(x, y)$ рассматриваемого типа выполняются условия:

а) $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} > 0$ во всем квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$;

б) $\frac{d^m}{dx^m}\int_a^b K(x, y)\, dy < 0$ во всем промежутке $a \leqslant x \leqslant b$.

Тогда имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если $\left|\frac{\partial^m K}{\partial x^m}\right| < \frac{M}{|x-y|^{\alpha}}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, а выражение $J_m(x) = \int_a^b K\, dy$ обращается в бесконечность при $x=a$ и $x=b$, то ядро $K(x, y)$ замкнуто относительно класса функций, удовлетворяющих условию Липшица.*

Теорема 2. *Если $\left|\frac{\partial^{m-1} K}{\partial x^{m-1}}\right| < \frac{M}{|x-y|^{\alpha}}$, $\left|\frac{\partial^m K}{\partial x^m}\right| < \frac{M}{|x-y|^{\alpha+1}}$, где $1 \leqslant \alpha < 2$, а выражения $J_m(x)$ и*

$$\tilde{J}_m(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b \left(\frac{\partial^{m-2} K}{\partial x^{m-2}} - (x-y)\frac{\partial^{m-1} K}{\partial x^{m-1}}\right) dy$$

обращаются в бесконечность при $x=a$ и $x=b$, причем порядок обращения в бесконечность $J_m(x)$ выше порядка обращения в бесконечность $\tilde{J}_m(x)$, то ядро $K(x, y)$ замкнуто относительно класса функций, имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица.

Доказательство. Из формулы (1) и, соответственно, (2) и условия ортогональности $\int\limits_a^b K(x, y)\, u(y)\, dy = 0$ вытекает

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^m K}{\partial x^m}(u(y) - u(x))\, dy + J_m(x)\, u(x) = 0, \tag{3}$$

или, соответственно,

$$\int\limits_a^b \frac{\partial^m K}{\partial x^m}(u(y) - u(x) - (y - x)\, u'(x))\, dy + \tilde{J}_m(x)\, u'(x) + J_m(x)\, u(x) = 0. \tag{4}$$

Первые слагаемые в левых частях уравнений (3) и (4) остаются ограниченными во всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, тогда как $J_m(x)$, а также $\tilde{J}_m(x)$ в случае теоремы 2 обращаются в бесконечность при $x = a$ и $x = b$, причем порядок обращения в бесконечность $J_m(x)$ выше порядка обращения в бесконечность $\tilde{J}_m(x)$.

Поэтому в обоих случаях должны выполняться условия

$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0. \tag{5}$$

Таким образом, функция $u(x)$ либо тождественно равна нулю, либо имеет в промежутке (a, b) положительный внутренний максимум или отрицательный внутренний минимум.

Но из неравенств а) и б) и соотношений (3) или (5) следует, что, если $u(x)$ достигает своего минимума во внутренней точке x_1 или своего максимума в точке x_2 промежутка (a, b), то $u(x_1) \geqslant 0$, $u(x_2) \leqslant 0$.

Следовательно, $u(x)$ тождественно равняется нулю.

Примеры.

а) $K(x, y) = |x - y|^{\sigma}$; $a = 0$; $b = 1$; $\sigma > -1$.

$$\frac{\partial^{2m} K}{\partial x^{2m}} = \sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - 2m + 1)\, |x - y|^{\sigma - 2m};$$

$$J_{2m}(x) = -\sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - 2m + 2)\, [x^{\sigma - 2m + 1} + (1 - x)^{\sigma - 2m + 1}];$$

$$\tilde{J}_{2m}(x) = -\sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - 2m + 3)(\sigma - 2m + 1) \times$$
$$\times [x^{\sigma - 2m + 2} - (1 - x)^{\sigma - 2m + 2}].$$

Если $2m > \sigma + 1$, то $\dfrac{\partial^{2m} K}{\partial x^{2m}}$ и $J_{2m}(x)$ имеют противоположные знаки.

Если $2m - 2 < \sigma < 2m - 1$, то производная $\dfrac{\partial^{2m-1} K}{\partial x^{2m-1}}$ интегрируема, $J_{2m}(x)$ обращается в бесконечность при $x = 0$ и $x = 1$, т. е. выполняются условия теоремы 1.

Если $2m - 3 < \sigma < 2m - 2$, то производная $\dfrac{\partial^{2m-2} K}{\partial x^{m-2}}$ интегрируема,

$$\frac{\partial^{2m-1} K}{\partial x^{2m-1}} = \frac{A}{|x - y|^{2m - 1 - \sigma}}; \quad \frac{\partial^{2m} K}{\partial x^{2m}} = \frac{B}{|x - y|^{2m - \sigma}},$$ причем $1 < 2m - 1 - \sigma < 2$.

При $x = 0$ и $x = 1$ $\tilde{J}_{2m}(x)$ обращается в бесконечность порядка $2m - \sigma - 2$, а $J_{2m}(x)$ — в бесконечность порядка $2m - \sigma - 1$. Следовательно, выполняются условия теоремы 2.

б) $K(x, y)=(x-y)^{2m-2}\ln|x-y|$; $a=0$; $b=1$; $m\geqslant 1$ целое.

$$\frac{\partial^{2m-1}K}{\partial x^{2m-1}}=\frac{(2m-2)!}{x-y}; \qquad \frac{\partial^{2m}K}{\partial x^{2m}}=-\frac{(2m-2)!}{(x-y)^2},$$

$$J_{2m}(x)=(2m-2)!\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right); \quad \tilde{J}_{2m}(x)=\ln\frac{x}{1-x}.$$

Следовательно, выполняются условия теоремы 2.

в) $K(x, y)=|x-y|^{\sigma}\left(\ln|x-y|-\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma-1}-\ldots-\frac{1}{\sigma-2m+2}\right)$,

где $2m-1\geqslant\sigma>2m-3$; $\sigma\neq 2m-2$.

$$\frac{\partial^{2m}K}{\partial x^{2m}}=\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-2m+2)|x-y|^{\sigma-2m}[(\sigma-2m+1)\ln|x-y|+1],$$

$$J_{2m}(x)=\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-2m+2)[x^{\sigma-2m+1}\ln x+(1-x)^{\sigma-2m+1}\ln(1-x)],$$

$$\tilde{J}_{2m}(x)=-\sigma(\sigma-1)\ldots(\sigma-2m+3)(\sigma-2m+1)\times$$
$$\times\left[\left(\ln x+\frac{1}{(\sigma-2m+1)(\sigma-2m+2)}\right)x^{\sigma-2m+2}-\right.$$
$$\left.-\left(\ln(1-x)+\frac{1}{(\sigma-2m+1)(\sigma-2m+2)}\right)(1-x)^{\sigma-2m+2}\right].$$

Эти формулы показывают, что при $2m-1\geqslant\sigma>2m-2$ выполняются условия теоремы 1, а при $2m-2>\sigma>2m-3$ выполняются условия теоремы 2.

Поступило
5 V 1948