Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. З. ПЕТРОВ

О КРИВИЗНЕ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1948)

Рассмотрим одно из возможных обобщений римановой кривизны v_n, которое может быть естественным образом связано с гравитационным полем общей теории относительности; оно может быть осуществлено для любого v_n с неопределенной, вообще говоря, метрикой.

При перенесении в v_n некоторого вектора ξ^i параллельно вдоль границы неособенного элемента поверхности $v^{ij}\Delta\sigma$ в определенном направлении, соответствующем направлению вращения однолистного бивектора v^{ij}, этот вектор получает, как известно [1], приращение

$$\Delta\xi^i = R^i_{\ jkl}\, v^{kl}\, \xi^j \Delta\sigma + O(\delta^3), \tag{1}$$

где символом $O(\delta^m)$ обозначается бесконечно малая m-го порядка, если считать, что $\Delta\sigma = O(\delta^2)$. Если в плоскости бивектора v^{ij} выбрать два вектора $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$ так, чтобы они определяли бивектор u^{ij} с той же ориентацией, как и у бивектора v^{ij}, и обнести эти векторы вдоль данного бесконечно малого контура, то эти обнесенные векторы определяют бивектор $u^{ij} + \Delta u^{ij}$, который представляет собой результат обнесения по данному контуру неизотропного $(u_{ij}u^{ij} = s \neq 0)$ бивектора u^{ij}, и

$$\Delta u^{ij} = \Delta\underset{1}{\xi^{[i}}\,\underset{2}{\xi^{j]}} + \underset{1}{\xi^{[i}}\Delta\underset{2}{\xi^{j]}} + O(\delta^3). \tag{2}$$

Вводя для оценки взаимного положения бивекторов u^{ij} и $u^{ij} + \Delta u^{ij}$ угол φ, определяемый соотношением

$$\cos\varphi = \frac{u_{ij}(u^{ij} + \Delta u^{ij})}{\sqrt{|u_{kl}u^{kl}|\cdot|(u_{pq} + \Delta u_{pq})(u^{pq} + \Delta u^{pq})|}},$$

и имея в виду порядок малости $\Delta\sigma$, найдем отсюда, что

$$\sin^2\varphi = \frac{\Delta u_{ij}\,\Delta u^{ij} - s^{-1}(u_{ij}\,\Delta u^{ij})^2}{s + 2u_{ij}\,\Delta u^{ij} + \Delta u_{ij}\,\Delta u^{ij}} = O(\delta^4),$$

ввиду чего имеет смысл рассмотрение инварианта H, определяемого следующим образом:

$$2H = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin^2\varphi}{(\Delta\sigma)^2} = \lim\frac{\varphi^2}{(\Delta\sigma)^2} = \lim\frac{\Delta u_{ij}\,\Delta u^{ij}}{s\,(\Delta\sigma)^2}. \tag{3}$$

Заменяя бивектор u^{ij}, отличающийся лишь нормой от v^{ij}, этим бивектором, найдем из (1) и (2)

$$H = \frac{g_{ii_1jj_1} R^i{}_{hkl} R^{i_1}{}_{h_1k_1l_1} v^{ih} v^{kl} v^{i_1h_1} v^{k_1l_1}}{(g_{ihkl} v^{ih} v^{kl})^2}, \tag{4}$$

где

$$g_{ihkl} = g_{i[k} g_{l]h}.$$

Этот инвариант, который назовем **квадратичной кривизной** v_n, внешне напоминает риманову кривизну и допускает следующее геометрическое истолкование.

Для характеристики взаимного положения двух плоскостей в n-мерном пространстве можно ввести так называемые стационарные углы ([2]). Для двух двумерных плоскостей их будет два, α_1 и α_2, и они получаются при нахождении стационарных значений инварианта θ, определяющего косинус угла между двумя ортами, взятыми в каждой из рассматриваемых плоскостей. Ввиду неопределенности метрики эти орты будут иметь нормы l_1, l_2, равные ± 1.

Обозначив $l_1 l_2 \theta = \tau$ и вводя известным образом вспомогательную функцию Лагранжа, найдем два стационарных значения τ_1 и τ_2, которые будут выражаться через четыре данных вектора, определяющих базисы двух простых бивекторов $\underset{1}{u^{ij}}$ и $\underset{2}{u^{ij}}$, соответствующих данным плоскостям.

Если заменить бивекторы $\underset{1}{u^{ij}}$ и $\underset{2}{u^{ij}}$, соответственно, через u^{ij} и $u^{ij} + \Delta u^{ij}$ и предположить, что $\Delta\sigma \to 0$, то, пользуясь (1) и (2), легко показать, что $\lim \tau_1 = \lim \tau_2 = 1$ и, следовательно, величины $1 - \tau_i$ $(i = 1, 2)$ бесконечно малы.

Отсюда, если учесть порядок малости фигурирующих здесь величин, следует, что пределы

$$\underset{i}{\varkappa} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1 - \tau_i}{(\Delta\sigma^2)} \quad (i = 1, 2)$$

существуют, и они будут характеризовать **искривление** v_n относительно данного двумерного направления в том смысле, что дают меру изменения однолистного бивектора при обнесении его вдоль бесконечно малого контура, являющегося границей неособенного элемента поверхности $v^{ij}\Delta\sigma$.

Вместо системы инвариантов $\underset{i}{\varkappa}$ удобно, по аналогии с теорией поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, ввести эквивалентную систему инвариантов $\frac{1}{2}\left(\underset{1}{\varkappa} + \underset{2}{\varkappa}\right)$, $\underset{1}{\varkappa}\,\underset{2}{\varkappa}$, и тогда, учитывая лишь величины четвертого порядка малости включительно, найдем из (1), (2) и (3), что

$$\underset{1}{\varkappa}\,\underset{2}{\varkappa} = 0, \qquad \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\varkappa} + \underset{2}{\varkappa}\right) = H. \tag{5}$$

При этом возникает вопрос о полноте системы инвариантов, характеризующих взаимное положение двух плоскостей в n-мерном пространстве. Он был поставлен В. Ф. Каганом и решен Д. И. Перепелкиным ([3]) в предположении определенной метрики пространства; решение можно без труда распространить и на случай неопределенного мероопределения: дело сводится к несущественной разнице в обозначениях, вызываемой тем, что квадраты некоторых векторов будут меньше нуля.

Для рассматриваемого вопроса в качестве такой полной системы можно взять инварианты α_1, α_2 или эквивалентную систему: $\cos^2\varphi = \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2$, $\psi = \sin^2\alpha_1 \sin^2\alpha_2$. Если выразить α_i через $\underset{i}{\varkappa}$, то на основании (3) и (5) найдем, что

$$\psi = O(\delta^5),$$

и поэтому угол φ полностью характеризует взаимное положение исходного и обнесенного бивекторов с точностью до величин, не превышающих четвертого порядка малости. Это дает интерпретацию квадратичной кривизны Hv_n.

Для квадратичной кривизны v_n, так же как и для римановой, естественно поставить вопрос: когда H в данной точке v_n будет постоянной независимо от двумерного направления? Назовем такие многообразия v_n **постоянной квадратичной кривизны.** Полагая, что бивектор, определяющий двумерное направление, задается векторами $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$, условие $H = \text{const}$ при помощи (4) может быть записано:

$$T_{ijkli_1j_1k_1l_1} \underset{1}{\xi^i} \underset{2}{\xi^j} \underset{1}{\xi^k} \underset{2}{\xi^l} \underset{1}{\xi^{i_1}} \underset{2}{\xi^{j_1}} \underset{1}{\xi^{k_1}} \underset{2}{\xi^{l_1}} = 0, \tag{6}$$

где

$$T_{ijkli_1j_1k_1l_1} = g_{ihi_1h_1} R^h{}_{jkl} R^{h_1}{}_{j_1k_1l_1} - g_{jhi_1h_1} R^h{}_{ikl} R^{h_1}{}_{j_1k_1l_1} +$$
$$+ g_{jhj_1h_1} R^h{}_{ikl} R^{h_1}{}_{i_1k_1l_1} - g_{ihj_1h_1} R^h{}_{jkl} R^{h_1}{}_{i_1k_1l_1} - H g_{ijkl} g_{i_1j_1k_1l_1}. \tag{7}$$

Отсюда определение тензора кривизны v_n постоянной квадратичной кривизны сводится к нахождению тензора T из (6) при условии, что $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$ — произвольные векторы, и поэтому в принципе может быть осуществлено методом, аналогичным тому, который применяется при определении тензора кривизны пространств постоянной кривизны ([4]). Не останавливаясь на этом вопросе, который решается до конца, но приводит к несколько громоздким вычислениям, отметим следующие теоремы, которые можно доказать, не имея явного выражения для R_{ijkl} при любом n.

Теорема 1. *Любое v_n постоянной кривизны имеет постоянную квадратичную кривизну.*

Доказательство следует из (4), если заменить R_{ijkl} известным выражением этого тензора для случая постоянной кривизны.

Теорема 2. *Любое v_3 постоянной квадратичной кривизны имеет постоянную риманову кривизну.*

Доказательство следует из (6) и (7), если учесть, что для $n = 3$ тензор кривизны вполне определяется тензором Риччи

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj}.$$

Если для $n = 4$, пользуясь произволом в выборе векторов $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$, записать вместо (6) уравнение, выражающее равенство нулю коэффициента общего вида в многочлене (6) восьмой степени и затем проконтрактировать это уравнение по трем парам индексов, относительно которых это уравнение не антисимметрично, то мы придем к уравнению, левая часть которого будет комитантом от величин вида:

$$R_{ij}, \quad g_{ij}, \quad R, \quad R_{ij}R^{ij}, \quad R_{ijkl}R^{ijkl},$$

откуда следует, что

$$R_{ij} = \omega g_{ij},$$

и, следовательно:

Теорема 3. *Для* $n=4$ *любое многообразие постоянной квадратичной кривизны будет пространством Эйнштейна, т. е. одним из тех* v_n, *которые в общей теории относительности характеризуют пространство — время там, где оно пусто.*

Поступило
13 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Ф. Каган, Математ. сб., 208 (1923); (1923); H. Tietze, Math. Z., 16, 308 (1923). [2] C. Jordan, Bull. Soc. Math. de France, 3, 103 (1874—75). [3] Д. И. Перепелкин, Изв. физ.-мат. об-ва при Казанск. ун-те, 7, 55 (1934—35). [4] П. К. Рашевский, Введение в риманову геометрию и тензорный анализ, 1936, стр. 152—154.