Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. НОРДЕН

О НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПРОСТРАНСТВА МЕБИУСА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 V 1948)

Поверхность трехмерного конформного пространства Мебиуса называется нормализованной, если через каждую точку этой поверхности проходит нормализующий круг ортогональной поверхности [1].

Обозначим через x, X и ξ представителей пентасферических координат точки поверхности, второй точки нормализующего круга и касательной сферы, проходящей через эти точки, а через u^1, u^2 кроволинейные координаты и подберем числа l_1, l_2 так, чтобы сферы

$$y_i = \partial_i x - l_i x \tag{1}$$

пересекались по нормализующему кругу. Пользуясь возможностью нормирования однородных координат, получим следующие значения билинейных ковариантов введенных сфер и точек:

$$\begin{gathered} x^2 = 0, \quad \xi^2 = 1, \quad X^2 = 0, \\ x\xi = 0, \quad xX = 0, \quad X\xi = 0, \quad y_i y_j = g_{ij}. \end{gathered} \tag{2}$$

Разлагая производные пентасферических координат по криволинейным, мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\partial_i x = y_i - l_i x, && \text{(a)} \\ &\partial_i \xi = -g^{rs} b_{ri} y_s - m_i x, && \text{(b)} \\ &\partial_i X - g^{rs} p_{ri} y_s + m_i \xi - l_i X, && \text{(c)} \\ &\nabla_j y_i = \partial_j y_i - G_i^k, \quad y_k = -p_{ij} x - g_{ij} X + b_{ij} \xi. && \text{(d)} \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты этих разложений l_i, m_i, p_{ij}, b_{ij}, g_{ij} будут тензорами, последние два симметричны, а форма $dx^2 = g_{ij} du^i du^j$ определяет угловую метрику поверхности. Величины G_{ij}^k определяют аффинную связность без кручения, которая зависит только от поверхности и выбора нормализующего круга [1]. Мы будем называть эту связность в н у т р е н н е й с в я з н о с т ь ю или в н у т р е н н е й г е о м е т р и е й н о р м а л и з о в а н н о й п о в е р х н о с т и.

Условия интегрируемости (3) имеют вид

$$\begin{aligned} &g_{ij|k} = 2 l_k g_{ij}, && \text{(A)} \\ &p_{[ij]} = l_{[i|j]}, && \text{(B)} \\ &p_{i[j|k]} = -b_{i[jm_k]}, && \text{(C)} \\ &b_{i[j|k]} = b_{i[jl_k]} + g_{i[jm_k]}, && \text{(D)} \\ &g^{rs} p_{r[ib_j]s} + m_{[i|j]} + m_{[il_j]} = 0, && \text{(E)} \\ &R_{ji} = p_{ij} - p_{ji} + (g^{rs} p_{rs} + K) g_{ij}, && \text{(F)} \end{aligned} \tag{4}$$

где индексы за чертой обозначают ковариантное дифференцирование по отношению внутренней связности, R_{ji} — тензор Риччи этой связности, а

$$K = l / g \tag{5}$$

есть отношение дискриминантов соответствующих форм.

Вводя элемент угла касательных сфер

$$d\varphi^2 = d\xi^2 = l_{ij}\, du^i\, du^j, \tag{6}$$

мы можем придать условию (F) следующий вид:

$$l_{ij} - 2Hb_{ij} + Kg_{ij} = 0, \tag{7}$$

где

$$2H = g^{rs} l_{rs}. \tag{8}$$

Условие (A) показывает, что **внутренняя связность есть связность Вейля**, и можно показать, что, выбирая нормализующий круг, можно получить на поверхности любую связность такого типа.

Назовем **опорной сферой направления**, определяемого вектором v^i, такую сферу, проходящую через нормализующий круг, которая ортогональна данному направлению. Пентасферические координаты этой сферы будут

$$v = v^k y_k. \tag{9}$$

Направляющий круг однопараметрического семейства опорных сфер есть круг, проходящий через точку x поверхности ортогонально двум сферам семейства. Направляющий круг опорных сфер направлений, касающихся некоторой кривой, есть ее соприкасающийся круг. Предполагая для общности, что вектор v^k принадлежит полю и разлагая его ковариантную производную по нему и по вектору $\bar{v}^k$, который получен из v^k поворотом на прямой угол без растяжения, будем иметь

$$\nabla_s v^k = a_s v^k + b_s \bar{v}^k. \tag{10}$$

Направляющий круг семейства, заданного вдоль линии $u^i = u^i(t)$, будет лежать на пересечении двух сфер

$$\mu = \xi - \frac{w_r\, du^r}{\bar{v}_s du^s} x, \qquad \nu = \bar{v}^k y_k + \frac{b_r\, du^r}{\bar{v}_s\, du^s}, \tag{11}$$

где

$$\bar{v}_k = g_{ki}\bar{v}^i, \qquad w_k = b_{ki} v^i. \tag{12}$$

Все направляющие круги, соответствующие различным направлениям сдвига du^i, лежат на одной сфере — **направляющей сфере поля**.

Пентасферические координаты направляющей сферы выражаются так:

$$\lambda = \varepsilon^{ij} (w_i \bar{v}_j v^s y_s + \bar{v}_i b_j x + w_i b_j \xi), \tag{13}$$

где ε^{ij} — бивектор.

Если v^i есть направление сдвига точки, а w^i — направление характеристики семейства касательных сфер ξ, то направления, удовлетворяющие условию $b_{ij}\, du^i\, du^j = 0$, называются сопряженными относительно сферы ξ [3]. Самосопряженное или асимптотическое направление относительно сферы ξ характеризуется тем, что соприкасающийся круг линий этого направления принадлежит сфере ξ. Направления, которые являются одновременно сопряженными и ортогональными, совпадают с главными направлениями поверхности. Поля главных направлений характеризуются тем, что их направляющие сферы касаются поверхности. Эти направляющие сферы совпадают с главными сферами поверхности. Центральная сфера поверхности [2], т. е. та сфера, по отношению к которой главные сферы соответствуют в инверсии*, определяется пентасферическими координатами $\gamma = \xi - Hx$.

Соприкасающиеся круги линий всякого поля $\underset{\varphi}{v^i}$, направление которого образует постоянный угол φ с направлением данного поля, лежат на одной сфере с кругом пересечения сфер

$$z_i = y_i - \bar{b}_i x, \tag{14}$$

где $\bar{b}_i = g_i^k b_k$, а g_i^j — в е р с о р, т. е. тензор, осуществляющий поворот на прямой угол.

Будем называть круг (14) нормальным кругом поля v^i. Внутренняя связность вполне характеризуется тем фактом, что направляющий круг семейства опорных сфер вектора, переносящегося параллельно во внутренней связности, лежит на одной сфере с нормализующим кругом. Геодезическими линиями внутренней связности будут такие и только такие линии, соприкасающийся круг которых лежит на одной сфере с нормализующим кругом. Отсюда следует, что геодезические линии образуют циклическую систему [2]. Перейдем к рассмотрению частных случаев нормализаций.

1. Назовем нормализацию р и м а н о в о й, если ей соответствует риманова внутренняя геометрия. В этом случае вектор l_i будет градиентом и может быть обращен в нуль за счет выбора нормирования. Условием римановой нормализации будет

$$p_{[ij]} = 0. \tag{15}$$

Будем называть ф о к а л ь н о й такую линию на поверхности, вдоль которой нормализующие круги имеют огибающую, а фокусом — точку этой огибающей. На всяком нормализующем круге лежат, вообще говоря, четыре фокуса [2]. Для того чтобы нормализация была римановой, необходимо и достаточно, чтобы направления двух различных фокальных линий были сопряжены относительно средней сферы двух сфер, касающихся поверхности и проходящих через соответствующие фокусы.

2. Мы будем говорить, что н о р м а л и з а ц и я о п р е д е л е н а к о н г р у е н ц и е й с ф е р ξ, к а с а ю щ и х с я п о в е р х н о с т и, если нормализующий круг соединяет соответствующие точки огибающих этих сфер. Такая нормализация характеризуется условием $m_i = 0$, а ее внутренняя связность сопряжена по отношению к соответствующей асимптотической сети римановой связности, определенной линейным элементом (6).

3. Для того чтобы нормализация принадлежала одновременно типу 1 и 2, необходимо и достаточно, чтобы конгруенция нормализующих кругов была конгруенцией Рибокура.

4. К в а з и е в к л и д о в о й мы назовем такую нормализацию, которая определяет на поверхности квазиевклидову связность, т. е. связ-

* Мы будем в дальнейшем называть с р е д н е й такую сферу, по отношению к которой две данные соответствуют в инверсии.

ность с абсолютным параллелизмом направлений. Нормализующий круг такой нормализации совпадает с нормальным кругом некоторого поля направлений. Признак рассматриваемой нормализации имеет вид $R_{(ij)} = 0$.

5. Евклидова нормализация, определяющая внутреннюю евклидову геометрию, принадлежит одновременно классам 1 и 4. Ее нормализующий круг должен быть нормальным кругом поля направлений касающихся изотермического семейства, т. е. семейства линий уровня гармонических функций.

Далее мы рассмотрим нормализации с помощью трех конформно-инвариантных кругов поверхности.

6. За первый инвариантный круг мы примем нормальный круг ([2]) поверхности или круг, соединяющий точки огибающих семейства центральных сфер. Такие нормализации характеризуются условиями $2H = 0$, $m_i = 0$. Внутренняя связность будет, вообще говоря, нериманова. Она конформна римановой метрике с линейным элементом (6) и сопряжена с ней по отношению к сети линий кривизны.

7. Второй инвариантный круг или псевдонормальный круг ([2]) поверхности есть нормальный круг полей главных направлений. Внутренняя геометрия квазиевклидова. а нормализация характеризуется условием $2H = 0$, $\nabla_s b_{ij} = (2 l_s + \partial_s \lg K) b_{ij}$.

8. Третий инвариантный круг определяет риманову нормализацию, соответствующую каноническому нормированию, определяемому условиями: $2H = 0$, $K = -1$, $l_i = 0$.

Внутренняя геометрия в этом случае риманова с линейным элементом (6). Обозначая через $\underset{1}{G^k_{ij}}$, $\underset{2}{G^k_{ij}}$, $\underset{3}{G^k_{ij}}$ объекты связностей, соответственно определенных тремя инвариантными кругами, мы будем иметь $\underset{2}{G^k_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{G^k_{ij}} + \underset{3}{G^k_{ij}}\right)$.

Если одна из геометрий $\underset{1}{G}$ или $\underset{2}{G}$ риманова, то это имеет место и для всех трех и характеризует изотермические поверхности.

9. Предполагая, что все нормализующие круги ортогональны одной неизменной сфере A и выбирая точку X так, чтобы она соответствовала x в инверсии относительно этой сферы, мы получим рибокуровскую нормализацию, характеризуемую условиями $m_i = 0$, $l_i = 0$, $p_{ij} = \lambda g_{ij}$.

В этом случае теория нормализованных поверхностей совпадает с теорией поверхностей эллиптического, гиперболического или евклидова пространства, в зависимости от того, будет ли сфера A мнимой, действительной или вырождается в точку. В последнем случае все нормализующие круги проходят через эту точку и $p_{ij} = 0$.

10. Нормализованная сфера характеризуется условием $b_{ij} = \lambda g_{ij}$. Выбирая точку X так, чтобы она лежала на той же сфере, мы будем иметь $b_{ij} = 0$, $m_i = 0$.

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии Наук СССР

Поступило
20 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Норден, Матем. сб., **20**:2 (1947). [2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, **3**, Berlin, 1929. [3] T. Takasu, Differentialgeometrie in den Kugelräumen, Tokyo, 1939.