Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. П. НОВИКОВ

НОВОЕ РЕШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО УРАВНЕНИЯ $ax^2+by^2+cz^2=0$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 V 1948)

Рассмотрим решение неопределенного уравнения

$$ax^2+by^2+cz^2=0, \tag{1}$$

где a, b, c — заданные целые рациональные числа, в целых рациональных x, y, z.

Как известно, при заданных a, b, c уравнение (1) либо вовсе не имеет целых решений, либо имеет бесконечно много целых решений. Если α, β, γ — одно из таких решений, то все остальные решения могут быть, как известно, выражены в параметрической форме, причем, в зависимости от структуры решения и числа параметров, последние связываются некоторыми дополнительными условиями ([1]). В настоящей работе дается решение уравнения (1), повидимому, более простое, нежели известные.

Решение уравнения (1) дает

Теорема. *Все целые решения x, y, z уравнения (1) с попарно взаимно простыми x, y, z даются формулами*:

$$\pm x=t_1+t_2, \tag{2}$$
$$\pm y=\beta(t_1-t_2)-2t_3\gamma c, \tag{3}$$
$$\pm z=\gamma(t_1-t_2)+2t_3\gamma b, \tag{4}$$

где 1, β, γ — *некоторое целое решение уравнения* (1), *т. е.*

$$a=-(b\beta^2+c\gamma^2), \tag{5}$$

а t_1, t_2, t_3 — *произвольные целые параметры, связанные условием*

$$t_1t_2=t_3^2bc. \tag{6}$$

Доказательство. Что (2) — (4) дает решения уравнения (1), целые при целых значениях t_1, t_2, t_3, проверяется подстановкой (2) — (6) в (1), которая дает алгебраическое тождество.

Пусть теперь x, y, z — произвольное целое решение уравнения (1) с попарно взаимно простыми x, y, z.

Напишем систему:

$$
\begin{aligned}
&\pm 2ax = t_1 + t_2,\\
&\pm 2ay = \beta(t_1 - t_2) - 2t_3\gamma c,\\
&\pm 2az = \gamma(t_1 - t_2) + 2t_3\beta b.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Решая ее и принимая во внимание (5), мы получим

$$t_1 = ax \pm (\beta by + \gamma cz), \tag{8}$$

$$t_2 = ax \mp (\beta by + \gamma cz), \tag{9}$$

$$t_3 = \beta z - \gamma y. \tag{10}$$

Подставляя (8) — (10) в выражение $t_1t_2 - t_3^2bc$ и опять принимая во внимание (5), мы получим:

$$t_1t_2 - t_3^2bc = a(ax^2 + by^2 + cz^2) = 0,$$

т. е. всякое целое решение x, y, z уравнения (1) с попарно взаимно простыми x, y, z получается по формулам (2) — (4) при некоторых целых t_1, t_2, t_3, удовлетворяющих соотношению (6). Теорема доказана.

Поступило
17 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Г. Лежен Дирихле, Лекции по теории чисел, 1936.