Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

В. Ф. НИКОЛАЕВ

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 22 V 1948)

Пусть в пространстве $C(a, b)$ задан линейный оператор (из C в C) $J_n(x; f)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, приводящий в соответствие каждой $f(x)$ из C некоторый полином (обыкновенный или тригонометрический).

В настоящей заметке устанавливается невозможность выполнения для некоторых операторов J_n соотношения

$$\lim_{n\to\infty} J_n(x; f) = f(x) \text{ для каждой } f(x) \in C \tag{1}$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Как известно, необходимым условием для (1) является ограниченность последовательности норм $\| J_n \|_C$ линейных операторов J_n. Общим средством для установления неограниченности норм рассматриваемых здесь операторов будет применение оператора J_n к полиному Φ (см. ниже), являющемуся видоизменением известного полинома Фейера.

Положим

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) + \chi(\theta),$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{1}{A}\left[\frac{\cos(\mu+1)\theta}{n} + \frac{\cos(\mu+2)\theta}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(n-\mu)\theta}{2\mu+1}\right],$$

$$\chi(\theta) = -\frac{1}{A}\left[\frac{\cos(n+3\mu+2)\theta}{2\mu+1} + \frac{\cos(n+3\mu+3)\theta}{2\mu+2} + \ldots + \frac{\cos(n+\mu+1)\theta}{n}\right].$$

Известно, что существует такая постоянная A (не зависящая от θ, n, μ), что $|\varphi(\theta)|$ остается $\leqslant 1$.

Взяв именно такое A и произвольное α, построим косинус-полином

$$\Phi(\alpha, \theta) = \frac{\varphi(\alpha-\theta) + \varphi(\alpha+\theta)}{2} = \Psi(\alpha, \theta) + X(\alpha, \theta),$$

где, ради краткости, обозначено:

$$\Psi(\alpha, \theta) = \frac{\psi(\alpha-\theta) + \psi(\alpha+\theta)}{2}, \quad X(\alpha, \theta) = \frac{\chi(\alpha-\theta) + \chi(\alpha+\theta)}{2}.$$

Очевидно, что $|\Phi(\alpha, \theta)| \leqslant 1$ при любых θ, n, μ, α.

Отметим еще, что

$$\psi(0) = \frac{1}{A} \sum_{\nu=2\mu+1}^{n} \frac{1}{\nu} > \frac{1}{A} \log \frac{n}{2\mu+1}.$$

1. Пусть

$$\omega_0(x),\ \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots \tag{2}$$

нормированная система ортогональных полиномов (обыкновенных) на промежутке $[a, b]$ относительно произвольного интегрального веса $g(x)$.

Образуем ряд Фурье функции $f(x) \in C$ относительно системы (2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(x), \qquad a_n = \int_a^b f(t)\, \omega_n(t)\, dg(t).$$

Теорема 1. *Не существует такой системы ортогональных на* $[a, b]$ *полиномов, чтобы любая непрерывная функция разлагалась в равномерно сходящийся на* $[a, b]$ *ряд Фурье по этим полиномам.* (*Аналогично — для разложения по ортогональным тригонометрическим полиномам на* $[0, 2\pi]$.)

Доказательство проведем лишь для случая ортогональных косинус-полиномов на промежутке $[0, \pi]$.

Образуем частичную сумму ряда Фурье:

$$J_n(\theta; f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(\theta) \int_0^{\pi} f(t)\, \omega_k(t)\, dg(t) =$$

$$= \int_0^{\pi} K_n(\theta, t) f(t)\, dg(t),$$

где обозначено

$$K_n(\theta, t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(\theta)\, \omega_k(t),$$

и применим этот оператор J_n к полиному Φ, взяв в нем $\mu = 0$.

Так как, очевидно,

$$J_n(\theta; \Psi) \equiv \Psi(\alpha, \theta),$$

то

$$J_n(\theta; \Phi) = J_n(\theta; \Psi) + J_n(\theta; X) = \Psi(\alpha, \theta) + \int_0^{\pi} K_n(\theta, t)\, X(\alpha, t)\, dg(t).$$

Положив $\theta = \alpha$, получаем:

$$J_n(\alpha; \Phi) = \frac{\psi(0)}{2} + \frac{\psi(2\alpha)}{2} + \int_0^{\pi} K_n(\alpha, t)\, X(\alpha, t)\, dg(t) = \frac{\psi(0)}{2} + S(\alpha),$$

где $S(\alpha)$ есть, как нетрудно проверить, косинус-полином от α без свободного члена. Значит, при некотором $\alpha = \alpha'$ из $[0, \pi]$ $S(\alpha)$ обратится в нуль, так что

$$J_n(\alpha'; \Phi) = \frac{\psi(0)}{2} > \frac{1}{2a} \log n.$$

Следовательно, и подавно,

$$\| J_n \| \max_{\theta \in [0, \pi]} \int_0^\pi | K_n(\theta, t) | \, dg(t) > \frac{1}{2A} \log n,$$

т. е. последовательность норм неограничена, — теорема доказана.

Замечание. Очевидно, все рассуждения применимы и к случаю разложения по биортогональным полиномам.

2. Излагаемые ниже теоремы 2 и 3 относятся к „проблеме интерполирования“ акад. С. Н. Бернштейна (1) — об определении асимптотической величины отношения (λ) степени $(n+m)$ интерполяционного полинома к числу узлов $(n+1)$, при которой интерполяционный полином еще обладает свойством (1).

При доказательстве (вторичном) своего результата: $\lambda = 1 + \varepsilon$, где ε — произвольно малое постоянное положительное число, С. Н. Бернштейн (2) пользуется интерполяционной формулой вида

$$\sum_{k=0}^{2n} l_k(\theta) \frac{\sin(2m+1)\frac{\theta - \theta_k}{2}}{(2m+1)\sin\frac{\theta - \theta_k}{2}} f(\theta_k)$$

с узлами

$$\theta_k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad m = [\varepsilon n].$$

Дополнением к этому может служить следующая теорема 2.

Пусть

$$x_0^{(n+1)}, \quad x_1^{(n+1)}, \ldots, \quad x_n^{n+1} \tag{3}$$

произвольная система узлов на $[a, b]$; $l_k^{(n+1)}(x)$ — основные полиномы интерполяционной формулы Лагранжа с узлами (3), а $P(x, y)$ — любой полином степени m относительно каждого из аргументов и такой, что $P(x, x) \equiv 1$.

Рассмотрим оператор

$$J_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) P(x, x_k) f(x_k). \tag{4}$$

Он, очевидно, интерполяционный, т. е.

$$J_n(x_k; f) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 2. *Если $m = o(n)$, то, какова бы ни была система узлов (3) и как бы ни выбирать полином $P(x, y)$, соотношение (1) не может иметь места для интерполяционного оператора (4). (Аналогично — для интерполирования тригонометрическими полиномами на $[0, 2\pi]$.)*

Доказательство, в общем, такое же, как в n° 1: построив косинус-полином $J_n(\theta; f)$, применяем его к полиному Φ, взяв $\mu = m$. Полагая $\theta = \alpha$, затем получим

$$\| J_n \| > \frac{1}{2A} \log \frac{n}{2m+1},$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Нетрудно видеть, что результат переносится и на операторы вида

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\theta, t) \frac{D_m(\theta, t)}{2m+1} f(t)\, dt \text{ или } \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(\theta, t)\, P(\theta, t) f(t)\, dt,$$

где $D_p(\theta, t)$ $(p = n, m)$ — „ядро Дирихле“.

3. Таким же, в основном, методом доказывается теорема 3, которую, из-за недостатка места, приведем без доказательства.

Рассмотрим интерполяционный оператор более общего вида, чем (4):

$$J_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, m_k(x) f(x_k), \tag{5}$$

где $m_k(x)$ — полином, подчиненный единственному условию:

$$m_k(x_k) = 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Обозначим через m наибольшую из степеней полиномов $m_k(x)$.

Теорема 3. *Если $m = o(n)$ и в качестве узлов интерполирования взяты корни ортогональных полиномов $\omega_{n+1}(x)$, соответствующих любому суммируемому дифференциальному весу, то соотношение (1) не может иметь места для интерполяционного оператора (5). (Аналогично — для интерполирования тригонометрическими полиномами на $[0, 2\pi]$.)*

Замечание. Результат сохраняется, если предположить лишь, что: 1) $J_n(x; f)$ есть интерполяционный полином степени $n + o(n)$ с узлами в корнях ортогонального полинома $\omega_{n+1}(x)$; 2) $J_n(x; f)$ есть линейный оператор.

Поступило
5 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Тр. 1-го всесоюзн. съезда математ., 1936, стр. 79.
[2] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, № 9, 1151 (1931).