Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Г. МИХЛИН

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 V 1948)

В настоящей заметке мы формулируем некоторые наши результаты о сходимости метода Галеркина.

1. Пусть линейный оператор A определен на линеале M, плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H, и пусть требуется решить уравнение

$$Au-f=0, \tag{1}$$

где $f\in H$ — данный элемент. Метод Галеркина служит для приближенного решения уравнения (1) и состоит, как известно, в следующем.

Выбираем полную в H последовательность $\varphi_n\in M$ (эту последовательность мы будем называть основной); приближенное решение уравнения (1) берется в виде

$$u\approx u_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, \tag{2}$$

где постоянные a_k определяются из требования, чтобы после замены u через u_n левая часть уравнения (1) была ортогональна к $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Это требование дает для a_k систему линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}(A_k\varphi_k, \varphi_j)\, a_k=(f, \varphi_j), \qquad j=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

2. Пусть на упомянутом выше линеале M определен билинейный функционал $A_0(u, v)$. Пусть, далее, этот функционал положительно-определенный, т. е.

$$A_0(u, u)\geqslant\gamma^2\,\|u\|^2, \qquad 0<\gamma=\text{const}. \tag{4}$$

Допустим, наконец, что при фиксированном $u\in M$ и при $v\in M$ $A_0(u, v)$ есть ограниченный функционал от v.

Построим новое гильбертово пространство H_0, в котором скалярное произведение (мы будем обозначать его квадратными скобками) определяется формулой

$$[u, v]=A_0(u, v). \tag{5}$$

Норму в H_0 будем обозначать символом $|u|$, так что

$$|u|^2=[u, u]=A_0(u, u).$$

Если построенное таким образом пространство окажется неполным, мы обычным образом дополним его. В последующем будем считать H_0 полным.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Все элементы пространства H_0 принадлежат также и пространству H.*

Решим задачу о минимуме функционала

$$F = A_0(u, u) - (u, f) - (f, u), \tag{6}$$

где $f \in H$ — заданный элемент, а $u \in H_0$.

Нетрудно видеть, что при $f \in H$ фиксированном (u, f) есть ограниченный функционал в H_0. Отсюда вытекает существование элемента $f' \in H_0$ такого, что

$$(u, f) = [u, f']. \tag{7}$$

Но тогда $F = |u - f'|^2 - |f'|^2$ и очевидно, что F достигает минимума при $u = f'$ *.

Формула (7) определяет в H оператор $f' = Bf$. Можно доказать, что он — ограниченный самосопряженный и что существует обратный ему самосопряженный оператор $A_0 = B^{-1}$, область D_0 определения которого есть часть H_0, плотная в этом пространстве, а область значений совпадает с H.

Теорема 2. *Если $u \in D_0$ и $v \in D_0$, то $A_0(u, v) = (A_0 u, v)$.*

3. Пусть $A_0 u$ — заданный на M положительно-определенный оператор, т. е. такой, что

$$(A_0 u, u) \geqslant \gamma^2 \| u \|^2, \qquad 0 < \gamma = \text{const}.$$

Полагая $A_0(u, v) = (A_0 u, v)$ и повторяя рассуждения n° 2, мы найдем, что *заданный на плотном линеале положительно-определенный оператор может быть расширен до самосопряженного.*

Мы будем каждый раз считать, что такое расширение уже выполнено.

4. Пусть в уравнении (1) $Au = A_0 u + \lambda K u$, где оператор $A_0 u$ — положительно-определенный и λ — численный параметр. Допустим, что основная система полна не только в H, но и в H_0. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Метод Галеркина для уравнения* (1) *приводит к последовательности приближенных решений, сходящейся к точному в H_0, если:*

I. *Оператор A^{-1} существует и определен везде в H.*

II. *Оператор $T = A_0^{-1} K$ — вполне непрерывный в H_0.*

Теорема 4. *Если оператор $T = A_0^{-1} K$ — вполне непрерывный в H_0, то метод Галеркина в применении к задаче о характеристических числах оператора A приводит к сходящемуся процессу.*

5. Теоремы 3 и 4 позволяют установить сходимость метода Галеркина для ряда задач математической физики. Мы установили применимость этих теорем, в частности, в следующих задачах.

а) Краевая задача с самосопряженными условиями на концах конечного отрезка для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(-1)^m \frac{d^{2m} y}{dx^{2m}} + Ky = f(x),$$

где Ky — линейный дифференциальный оператор порядка $2m - 1$, коэффициенты которого непрерывны и достаточное число раз дифференцируемы.

* Опираясь на этот результат, нетрудно доказать сходимость метода Ритца для задачи о минимуме F, если только основная система — полная в H_0.

б) Краевая задача с самосопряженными условиями на границе S конечной области Ω для уравнения эллиптического типа

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{m} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f,$$

где коэффициенты A_{ik} непрерывны и непрерывно дифференцируемы, B_i и C ограничены в $\Omega + S$, а граница S достаточно гладкая.

в) Задачи об устойчивости и о равновесии защемленной по краю пластинки, находящейся под действием нормальной нагрузки и напряжений, лежащих в плоскости пластинки. В этом случае удается показать, что приближенные решения, получаемые по методу Галеркина для прогибов, равномерно стремятся к точному.

г) Пусть D — область m-мерного евклидова пространства, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S. Рассмотрим задачу о построении гармонической в D функции u, удовлетворяющей на S условию

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = f,$$

где ν — внешняя нормаль к S, σ — ограниченная и измеримая, а f — квадратично-суммируемая функция точки поверхности S. Следуя методу Галеркина, можно эту задачу решить так: строим полную последовательность гармонических в D функций φ_n, непрерывных вместе со своими первыми производными в $D + S$, полагаем

$$u \approx u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

и определяем коэффициенты a_k из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \int_S \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} + \sigma \varphi_k \right) \bar{\varphi}_j dS = \int_S f \bar{\varphi}_j dS, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Сходимость метода Галеркина в этой задаче можно установить, исходя из следующих утверждений: 1) оператор $A_0 u = \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu$, где h — ограниченная сверху и снизу положительными числами измеримая функция точки S,— положительно-определенный в гильбертовом пространстве H, элементы которого суть функции, гармонические в D и представимые через функцию Грина, а норма определяется формулой

$$\| u \|^2 = \int_S | u |^2 dS.$$

Оператор $A_0^{-1} = B$ — вполне непрерывный в том же пространстве.

2) Если оператор B, определяемый формулой (7), вполне непрерывен в H, то он вполне непрерывен и в H_0.

Число таких задач можно без труда увеличить.

Задачи а) и б) рассмотрены акад. М. В. Келдышем в его статье ([1]). Ограничиваясь частным видом краевых условий, он доказывает сходимость метода Галеркина в этих задачах.

Ленинградский государственный университет

Поступило 11 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, № 6 (1942).