Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 V 1948)

Введем следующие обозначения: $\tilde{C}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\| f \|_{\tilde{C}} = \max_x | f(x) |$; C — пространство функций, непрерывных на интервале $-1 \leqslant x \leqslant 1$, с нормой $\| f \|_C = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) |$; $\tilde{L}$ — пространство 2π-периодических функций, суммируемых на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, с нормой $\| f \|_{\tilde{L}} = \int_0^{2\pi} | f(x) | \, dx$; L — пространство функций, суммируемых на $-1 \leqslant x \leqslant 1$, с нормой $\| f \|_L = \int_{-1}^{1} | f(x) | \, dx$; Ω — множество всех функций $\omega(u)$, удовлетворяющих следующим четырем условиям: 1) $\omega(u)$ непрерывна при $0 \leqslant u < \infty$; 2) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ при $0 < u' \leqslant u''$; 3) $\omega(u_1 + u_2) \leqslant \omega(u_1) + \omega(u_2)$; 4) $\omega(0) = 0$.

При $\omega \in \Omega$ положим: $\tilde{C}_\omega$ — множество тех функций $f \in \tilde{C}$, для которых $| f(x+h) - f(x) | \leqslant K \omega(h)$ при $-\infty < x < x+h < \infty$, где K — некоторая константа, зависящая от f; $\tilde{C}^*_\omega$ — множество тех функций $f \in \tilde{C}_\omega$, для которых $\lim_{h \to 0+} \frac{| f(x+h) - f(x) |}{\omega(h)} = 0$ равномерно относительно x; C_ω — множество тех функций $f \in C$, для которых $| f(x+h) - f(x) | \leqslant K \omega(h)$ при $-1 \leqslant x < x+h \leqslant 1$, где K — некоторая константа, зависящая от f; C^*_ω — множество тех функций $f \in C_\omega$, для которых $\lim_{h \to 0+} \frac{| f(x+h) - f(x) |}{\omega(h)} = 0$ равномерно относительно x, $-1 \leqslant x < 1$; $\mathfrak{M}$ — множество всех функций $M(u)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $M(0) = 0$, $M(u) \geqslant 0$, выпукла и постоянно возрастает при $0 \leqslant u < \infty$; 2) $\lim_{u \to 0+} \frac{M(u)}{u} = 0$, $\lim_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty$; 3) $\overline{\lim_{u \to +\infty}} \frac{M(2u)}{M(u)} < +\infty$.

Известно, что всякая функция $M(u) \in \mathfrak{M}$ единственным образом представима в виде $M(u) = \int_0^u \varphi(t) \, dt$, где $\varphi(t)$ не убывает и непрерывна справа.

При $M(u) \in \mathfrak{M}$ положим: $\tilde{L}^M$ — пространство 2π-периодических функций, измеримых и удовлетворяющих условию $\int_0^{2\pi} M[|f(x)|] dx < +\infty$ с нормой Орлича(1). L^M — пространство функций, измеримых на $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} M[|f(x)|]\,dx < +\infty$ с нормой Орлича; n — натуральное число.

$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(n+{}^1/_2)t}{2\sin{}^1/_2 t}\,dt$ — n-я частная сумма ряда Фурье функции $f \in \tilde{L}$; $L_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\sin(n+{}^1/_2)\,t}{2\sin{}^1/_2\,t}\right| dt$ — константа Лебега.

Определение 1. Пусть G и H суть два функциональных пространства типа (B), каждое из которых содержит все тригонометрические полиномы, и пусть $U(f) = U(f, x)$ — линейная операция из G в H. Говорим, что U есть тригонометрическая полиномиальная операция порядка n, если выполнены следующие два условия: 1) для любой функции $f \in G$ $U(f, x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$; 2) если $T_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, то $U(T_n, x) \equiv T_n(x)$.

Определение 2. Пусть G и H суть два функциональных пространства типа (B), каждое из которых содержит все полиномы, и пусть $U(f) = U(f, x)$ линейная операция из G в H. Говорим, что U есть полиномиальная операция порядка n, если выполнены следующие два условия: 1) для любой функции $f \in G$ $U(f, x)$ есть полином порядка $\leqslant n$; 2) если $P_n(x)$ есть полином порядка $\leqslant n$, то $U(P_n, x) \equiv P_n(x)$.

Замечание. Разложение функций в ряд Фурье и тригонометрическое интерполирование дают примеры последовательностей тригонометрических полиномиальных операций. Разложение функций по ортогональным полиномам и интерполирование полиномами дают примеры последовательностей полиномиальных операций.

§ 1. Тригонометрические полиномиальные операции

Теорема 1. *Пусть $U_n(f) = U_n(f, x)$ есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция из $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$ порядка n. Тогда $\| U_n \| \geqslant L_n$, причем знак равенства достигается, если $U_n(f, x) \equiv s_n(f, x)$.*

Теорема 2. *Пусть $U_n(f) = U_n(f, x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность тригонометрических полиномиальных операций из $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$ порядка, соответственно, n. Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда*

1) *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n = +\infty, \tag{1}$$

то существует $f \in \tilde{C}^*_\omega$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| U_n(f) \|_{\tilde{C}} = +\infty$.

2) *Если*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \omega\left(\frac{1}{n}\right)\log n > 0, \tag{2}$$

то существует $f \in \tilde{C}_\omega$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| f - U_n(f) \|_{\tilde{C}} > 0$.

Теорема 3. *Пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция из $\tilde{L}$ в $\tilde{L}$ порядка n. Тогда $\| U_n \| \geqslant L_n$, причем знак равенства достигается, если $U_n(f, x) \equiv s_n(f, x)$.*

Теорема 4. *Пусть функция $M(u) \in \mathfrak{M}$ такова, что*

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{M(u)}{u \log u} = 0, \tag{3}$$

и пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность линейных тригонометрических полиномиальных операций из $\tilde{L}^M$ в $\tilde{L}$ порядка, соответственно, n. Тогда найдется $f \in \tilde{L}^M$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| U_n(f) \|_{\tilde{L}} = +\infty$.

Теорема 5. *Пусть функция $M(u) \in \mathfrak{M}$ такова, что*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(2u)}{M(u)} = 2$$

и пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность линейных тригонометрических полиномиальных операций из $\tilde{L}^M$ в $\tilde{L}^M$ порядка, соответственно, n. Тогда найдется $f \in \tilde{L}^M$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \int\limits_0^{2\pi} M[|U_n(f, x)|]\, dx = +\infty$.

§ 2. Полиномиальные операции

Теорема 6. *Пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ есть линейная полиномиальная операция из C в C порядка n. Тогда $\| U_n \| \geqslant \frac{1}{2} L_n - \frac{1}{2}$.*

Теорема 7. *Пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность полиномиальных операций из C в C порядка, соответственно, n. Пусть $\omega \in \Omega$.*

Тогда:

1) *Если имеет место* (1), *то существует $f \in C^*_\omega$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| U_n(f) \|_C = +\infty$.*

2) *Если имеет место* (2), *то существует $f \in C_\omega$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| f - U_n(f) \|_C > 0$.*

Замечание. В. Ф. Николаев доказал [2], что по любой последовательности ортогональных полиномов найдется функция $f \in C$ такая, что ее разложение по этим ортогональным полиномам не сходится к ней равномерно. Обобщая результат В. Ф. Николаева, Ф. И. Харшиладзе доказал (не опубликовано), что в условиях теорем 1 и 6 настоящей работы имеем $\| U_n \| > A \log n$, где A — абсолютная константа.

Теорема 8. *Пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ есть линейная полиномиальная операция из L в L порядка n. Тогда $\| U_n \| \geqslant \frac{1}{2} L_n - \frac{1}{2}$.*

Теорема 9. *Пусть функция $M(u) \in \mathfrak{M}$ такова, что имеет место* (3), *и пусть $U_n(f)=U_n(f, x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность линейных полиномиальных операций из L^M в L порядка, соответственно, n. Тогда найдется $f \in L^M$ такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| U_n(f) \|_L = +\infty$.*

Теорема 10. *Пусть функция* $M(u) \in \mathfrak{M}$ *такова, что* $\overline{\lim\limits_{u \to +\infty}} \frac{\varphi(u^2)}{\varphi(u)} < +\infty$, *и пусть* $U_n(f) = U_n(f, x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *есть последовательность линейных полиномиальных операций из* L^M *в* L^M *порядка, соответственно,* n. *Тогда найдется* $f \in L^M$ *такая, что* $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \int\limits_{-1}^{1} M[|U_n(f, x)|]\,dx = +\infty$.

Поступило
26 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlisz, Bull. internation. de l'Acad. Polonaise, Cl. A, 207 (1932).
[2] В. Ф. Николаев, ДАН, **61**, № 2 (1948).