Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. М. ВАСИЛЬЕВ

ИНВОЛЮТИВНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСОВ ПРЯМЫХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1948)

1. Основные понятия проективной линейчатой геометрии удобно обозреть при помощи перенесения Плюкера, которое ставит прямые P_3 во взаимно-однозначное соответствие с точками гиперквадрики Q_4 пятимерного проективного пространства P_5. При этом линейные комплексы прямых соответствуют гиперплоскостям P_5. Линейные комплексы находятся в инволюции ([1]), если соответствующие им гиперплоскости в P_5 полярно сопряжены относительно Q_4.

Произвольный комплекс прямых изображается трехмерной поверхностью, целиком принадлежащей Q_4. Он имеет в каждой своей прямой ∞^1 касательных линейных комплексов (т. е. гиперплоскостей, содержащих трехмерную плоскость, касательную к соответствующей поверхности).

Назовем два комплекса, проходящих через одну прямую, пересекающимися инволютивно в этой прямой, если каждый линейный комплекс, касательный к одному из комплексов, находится в инволюции с каждым из линейных комплексов, касательных к другому. Через прямую можно провести не более четырех комплексов, пересекающихся в ней инволютивно друг к другу.

Инволютивной системой комплексов будем называть четыре однопараметрических семейства комплексов, каждое из которых расслаивает одну и ту же область многообразия прямых, причем комплексы всех четырех систем пересекаются в каждой прямой области инволютивно друг к другу.

2. Присоединим к каждой прямой области проективный репер (M_1, M_2, M_3, M_4) так, чтобы точки M_1 и M_2 лежали на прямой. Если инфинитезимальные перемещения репера имеют вид:

$$dM_i=\omega_i^\alpha M_\alpha; \quad (\omega_i^k)'=[\omega_i^\alpha\omega_\alpha^k]; \quad i, k=1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

где штрихом обозначено внешнее дифференцирование, то основными формами, определяющими смещение прямой, будут формы ω_1^3, ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4. При подходящем выборе репера четыре комплекса, пересекающиеся инволютивно по $[M_1, M_2]$, будут определяться уравнениями:

$$\omega_1^4-\omega_2^3=0; \quad \omega_1^4+\omega_2^3=0; \quad \omega_1^3-\omega_2^4=0; \quad \omega_1^3+\omega_2^4=0. \tag{2}$$

Так как семейства комплексов расслаивают область, то каждое из уравнений (2) должно быть вполне интегрируемым, откуда следует:

$$\begin{aligned}&[(\omega_1^4-\omega_2^3)', \ \omega_1^4-\omega_2^3]=0; \quad [(\omega_1^3-\omega_2^4)', \ \omega_1^3-\omega_2^4]=0;\\ &[(\omega_1^4+\omega_2^3)', \ \omega_1^4+\omega_2^3]=0; \quad [(\omega_1^3+\omega_2^4)', \ \omega_1^3+\omega_2^4]=0.\end{aligned} \tag{3}$$

Эти уравнения (3) полностью определяют искомые нами инволютивные системы комплексов. Если учесть формулы (1), то из уравнений (3) получим:

$$\begin{aligned}
&\omega_2^1 = p_1\omega_1^3 + p_2\omega_2^4 + r_1\omega_1^4 + r_2\omega_2^3;\\
&\omega_4^3 = -p_2\omega_1^3 - p_1\omega_2^4 + s_1\omega_1^4 + s_2\omega_2^3;\\
&\omega_3^4 = q_1\omega_1^3 + q_2\omega_2^4 - r_2\omega_1^4 - r_1\omega_2^3;\\
&\omega_1^2 = -q_2\omega_1^3 - q_1\omega_2^4 - s_2\omega_1^4 - s_1\omega_2^3;\\
&\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 = l_1\omega_2^3 + l_2\omega_1^4;\\
&\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4 = m_1\omega_1^3 + m_2\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{4}$$

Систему (3) оказывается возможным заменить равносильной ей системой:

$$\begin{aligned}
&[\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_3^4 + \omega_4^3,\ \omega_2^4 - \omega_1^3,\ \omega_2^3 - \omega_1^4] = 0;\\
&[\omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_3^4 + \omega_4^3,\ \omega_2^3 - \omega_1^4,\ \omega_2^4 + \omega_1^3] = 0;\\
&[\omega_1^2 - \omega_2^1 + \omega_3^4 - \omega_4^3,\ \omega_2^4 - \omega_1^3,\ \omega_2^3 + \omega_1^4] = 0;\\
&[\omega_1^2 + \omega_2^1 - \omega_3^4 - \omega_4^3,\ \omega_2^4 + \omega_1^3,\ \omega_2^3 + \omega_1^4] = 0;\\
&[\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_4^4,\ \omega_1^3,\ \omega_2^4] = 0;\\
&[\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4,\ \omega_2^3,\ \omega_1^4] = 0.
\end{aligned}$$

Эта система замкнута относительно внешнего дифференцирования, ее характеры и число Картана имеют значения: $s_1 = s_3 = s_4 = 0$, $s_2 = 6$, $Q = 12$. Так как общий интегральный элемент зависит тоже от 12 параметров, то, по признаку Картана, система в инволюции и определяет общее решение с произволом шести функций от двух аргументов [2].

3. Конгруенция, образованная пересечением комплексов

$$\omega_1^4 + \omega_2^3 = 0, \qquad \omega_1^4 - \omega_2^3 = 0, \tag{5}$$

имеет фокусами точки M_1 и M_2, а фокальными плоскостями — плоскости $[M_1, M_2, M_4]$ и $[M_1, M_2, M_3]$. Асимптотические линии на обеих фокальных поверхностях определяются в общем случае одним и тем же уравнением $(\omega_1^3)^2 - (\omega_2^4)^2 = 0$. Отсюда следует, что: a) асимптотические соответствуют друг другу, и мы имеем дело с конгруенцией W, и b) комплексы двух остальных семейств пересекают конгруенцию по линейчатым поверхностям, соединяющим соответствующие асимптотические. Теми же свойствами обладает конгруенция $\omega_1^3 - \omega_2^4 = 0$, $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$.

Уравнения (2), (3) допускают следующие преобразования репера:

$$\begin{aligned}
&M_1' = M_1 + M_2; \qquad && M_1'' = M_1 + iM_2;\\
&M_2' = M_1 - M_2; && M_2'' = M_1 - iM_2;\\
&M_3' = M_3 + M_4; && M_3'' = M_3 + iM_4;\\
&M_4' = M_3 - M_4; && M_4'' = M_3 - iM_4.
\end{aligned} \tag{6}$$

Всевозможные пары комплексов приводятся этими преобразованиями (с точностью до замены индексов $3 \longleftrightarrow 4$) к рассмотренному нами виду (5). Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Все шесть конгруенций, получаемых при попарном пересечении комплексов системы, проходящих через произвольный луч, суть конгруенции W; их фокусы попарно совпадают и образуют на луче три пары точек, каждая из которых гармонически делится двумя другими парами.*

Аналогичное расположение имеет место для фокальных плоскостей.

Каждая из линейчатых поверхностей, получаемых при пересечении трех комплексов системы, соединяет асимптотические линии на фокальных поверхностях конгруенций, получаемых при попарном пересечении взятых трех комплексов.

Четыре конгруенции всегда будут гиперболическими, две — эллиптическими.

4. Через каждый луч комплекса прямых проходит, вообще говоря, четыре развертывающихся поверхности, целиком принадлежащие комплексу и имеющие касание второго порядка с каждым из ∞^1 касательных линейных комплексов. Точка касания прямой с ребром возврата такой поверхности и ее касательная плоскость в данной прямой определяют так называемый „инфлексионный пучок“ ([1]).

Если взять уравнение комплекса в виде $\omega_1^4 - \omega_2^3 = 0$, то центру пучка $M_1 + zM_2$ соответствует плоскость, проходящая через точку $M_3 - zM_4$, а z удовлетворяет некоторому уравнению четвертого порядка. В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$z^4 + 2q_i z^2 + 1 = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{7}$$

для каждого из комплексов системы.

При заменах репера (6) уравнения (7) преобразуются в уравнения той же формы. Мы будем рассматривать всевозможные инволюции, которые переводят одну пару инфлексионных центров в другую. Этих инволюций будет три. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Три пары двойных точек инволюций, которые устанавливаются на каждом луче четырьмя центрами инфлексионных пучков любого комплекса системы, совпадают с шестью фокусами конгруенций, образованных попарным пересечением комплексов.*

Аналогичное расположение имееет место между плоскостями инфлексионных пучков и фокальными плоскостями конгруенций.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. С. П. Финикову, под непосредственным руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
12 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Koenigs, Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Paris, 1882.
[2] Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques Paris, 1945.