Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. А. БАРБАШИН

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОМ СКОРОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 V 1948)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,\ x_2,\ldots,x_n),\qquad i=1,\ 2,\ldots,n. \tag{1}$$

Мы предполагаем, что на некотором локально евклидовом многообразии M с локальными координатами $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений системы (1) на всем протяжении времени $-\infty<t<\infty$.

Обозначим через $f(p,\ t)$ положение точки p, которое она займет, двигаясь по траектории системы (1), через промежуток времени t. Гомеоморфные преобразования M на себя, осуществляемые функцией $f(p,\ t)$, дают нам динамическую систему на M в смысле (1).

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}X_i=1. \tag{2}$$

Допустим, что это уравнение имеет в качестве решения непрерывную однозначную функцию $u(p)=u(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)$, имеющую непрерывные частные производные первого порядка. Заметим, что из уравнений (1) и (2) следует

$$u(f(p,\ t))=u(p)+t. \tag{3}$$

Рассмотрим множество F всех точек p, в которых $u(p)=0$. Очевидно, F не пусто, ибо на каждой траектории имеется точно одна точка из F. Множество F замкнуто в M и является сечением динамической системы в том смысле, что всякая траектория системы, лежащая в M, пересекает F только в одной точке.

Рассмотрим топологическое произведение Z множества F на числовую ось T. Пусть $p\in M$, тогда имеем $f(p,-u(p))=q\in F$. Полагая $\psi(p)=(q,\ t_p)$, где $t_p=u(p)$, мы получаем отображение ψ многообразия M на Z. Это отображение переводит семейство траекторий из M на семейство параллельных прямых из Z. Так как $f(p,\ t)$ и $u(p)$ непрерывные функции, а $u(p)$, кроме того, и однозначна, то гомеоморфность отображения $\psi(p)$ доказывается без труда.

Таким образом, наша динамическая система допускает топологическое отображение своих траекторий на семейство параллельных прямых. Подобного рода динамические системы мы будем называть выпрямляемыми системами.

Как показал В. В. Немыцкий ([2]), динамическая система будет тогда и только тогда выпрямляемой, когда она вполне неустойчива и не имеет несобственного седла. С другой стороны, согласно D. Montgomery и L. Zippin ([4]), свойство выпрямляемости динамической системы эквивалентно свойству дисперсивности. Заметим, что указанные авторы называют динамическую систему дисперсивной, если для всякой пары точек p_1 и p_2 из M можно указать такие два положительных числа ε и N, что соотношение

$$f(S(p_1, \varepsilon), t) \cap S(p_2, \varepsilon) = 0$$

имеет место для всех t, $t > N$ ($S(p, \varepsilon)$ означает ε-окрестности точки p).

Итак, мы можем сформулировать нашу теорему следующим образом:

Теорема 1. *Если уравнение* (2) *допускает в качестве решения однозначную функцию* $u(p)$, *то динамическая система, определяемая уравнениями* (1), *будет дисперсивной.*

Заметим, что имеет место и обращение теоремы.

Очевидно, для всякой дисперсивной системы существует такое топологическое отображение, что новая динамическая система будет удовлетворять условию теоремы 1.

В самом деле, всегда можно подобрать отображение $\psi(p)$, о котором говорилось выше, таким образом, чтобы $\psi(M)$ лежало в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений, чтобы $\psi(F)$ лежало в евклидовом подпространстве и чтобы новые траектории были ортогональны к этому подпространству. Новая система будет иметь вид

$$\frac{dy_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1; \qquad \frac{dy_m}{dt} = 1$$

и, очевидно, удовлетворяет условию теоремы 1.

Теорема 2. *Если существует на* M *однозначная, имеющая непрерывные частные производные функция* $u(p)$ *и такое число* $k \neq 0$, *что*

$$N = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} X_i \geqslant k^2,$$

то динамическая система на M *дисперсивна.*

В самом деле, произведем в системе (1) замену времени, полагая

$$t' = \int_0^t N\, dt.$$

Новая система после замены будет иметь вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{N} X_i. \tag{1'}$$

Так как при неограниченном возрастании времени t новое время t' будет тоже неограниченно возрастать, то траектории системы (1') будут продолжаемы на всем протяжении времени t'.

Составляя уравнение (2) для полученной новой системы, мы непосредственно убеждаемся, что ему будет удовлетворять сама функция $u(p)$. Таким образом, мы получили динамическую систему, удовлетворяющую условиям теоремы 1.

Так как прежняя динамическая система отличается от новой только временем, то топологическое свойство быть выпрямляемой переносится и на нее.

Если динамическая система задана уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad i=1,\ 2, \ldots, n, \tag{4}$$

то мы скажем, что она обладает потенциалом скоростей.

Легко видеть, что дисперсивная система допускает топологическое отображение на динамическую систему, обладающую однозначным потенциалом. С другой стороны, из теоремы 2 сразу следует справедливость следующего утверждения.

Следствие. *Если динамическая система обладает однозначным потенциалом скоростей и таким, что*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \geqslant k^2, \text{ где } k \neq 0,$$

то она дисперсивна.

В более общем случае имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Если динамическая система обладает однозначным потенциалом скоростей, то каждая из точек M будет либо блуждающей, либо точкой покоя.*

Заметим, что точка p называется блуждающей, если существует окрестность $S(p)$ этой точки и число $\tau > 0$ такое, что $f(S(p), t) \cap \cap S(p) = 0$ при $t > \tau$.

Мы видим, что свойства динамической системы в последнем случае зависят в основном от структуры множества точек покоя. Однако точки покоя в этом случае являются не чем иным, как критическими точками функции $u(p)$. Большое число теорем о множествах критических точек хорошо развитой теории Л. Люстерника, Л. Шнирельмана, Л. Эльсгольца ([3]) без всяких изменений переносится и на множества точек покоя динамической системы с потенциалом скоростей.

Заметим, наконец, что условия теорем 1 и 2 могут иметь место только в том случае, когда многообразие M не компактно.

Поступило
19 III 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1947, стр. 265. [2] V. Niemytzki, Annali di Mat., ser. 4, 14 (1936). [3] Л. А. Люстерник, Усп. математ. наук, 1, в. 1 (11), 30 (1946). [4] D. Montgomery and L. Zippin, Am. J. Math., 59, No. 1, 121 (1937).