Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXI, № 2

МАТЕМАТИКА

М. А. АКИВИС

ПАРЫ T-КОМПЛЕКСОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1948)

1. Настоящая работа содержит решение задачи, поставленной С. П. Финиковым, о нахождении пар комплексов, аналогичных парам T-конгруенций (1). При этом вводится новое определение пары T-конгруенций С. П. Финикова, основанное на понятии гармонического пересечения линейчатых поверхностей (2). Кроме того, в работе рассмотрены возможные случаи вырождения, перенесение Плюкера для пары T-комплексов и приложение преобразования T к четырех-инволютивной системе комплексов А. М. Васильева (3).

2. Определение 1. Две линейчатые поверхности называются гармонически пересекающимися, если они имеют общую образующую и проективные ряды касательных плоскостей вдоль этой образующей к одной и другой поверхностям находятся в инволюции.

Для того чтобы две линейчатые поверхности, заданные в плюкеровых координатах как функции одного параметра, $p(t)$ и $q(s)$, пересекались гармонически, необходимо и достаточно, чтобы

$$p=q; \qquad (dp,\ dq)=0 \text{ при } t=t_0,\ s=s_0, \tag{1}$$

где круглые скобки обозначают плюкерово произведение двух комплексов (2).

3. Все рассуждения мы будем вести в трехмерном проективном пространстве P_3, рассматриваемом как линейчатое пространство.

Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — вершины проективного репера, $a_0=[M_1M_2]$, $a_1=[M_2M_3]$, $a_2=[M_3M_1]$, $a_3=[M_2M_4]$, $a_4=[M_1M_4]$, $a_5=[M_3M_4]$ — его ребра. Прямые $a_0, \ldots, a_5$ мы будем принимать в дальнейшем за линейчатый репер.

Из формул инфинитезимального перемещения репера следует:

$$da_0=(\omega_1^1+\omega_2^2)\,a_0-\omega_1^3a_1-\omega_2^3a_2-\omega_1^4a_3+\omega_2^4a_4, \tag{2}$$

$$da_5=(\omega_3^3+\omega_4^4)\,a_5-\omega_4^2a_1+\omega_4^1a_2+\omega_3^2a_3+\omega_3^1a_4. \tag{3}$$

Заметим еще, что простейший образ линейчатой геометрии — демиквадрика — всегда может быть представлена уравнением вида

$$p=a_0+bt+\frac{1}{2}a_5t^2, \tag{4}$$

где $(a_0b)=(a_5b)=0$, $(bb)+(a_0a_5)=0$.

4. Теорема 1. *Для того чтобы две конгруенции находились в соотношении T, необходимо и достаточно, чтобы нашелся однопараметрический пучок демиквадрик, пересекающих обе конгруенции гармонически вдоль соответствующих лучей.*

Пусть дана одна конгруенция, приведенная к реперу первого порядка. Тогда $\omega_2^3=\omega_1^4=0$ и $da_0=(\omega_1^1+\omega_2^2)\,a_0-\omega_1^3a_1+\omega_2^4a_4$, причем луч a_5 репера совершенно произволен. Будем искать демиквадрики, гармонически пересекающие все линейчатые поверхности конгруенции в виде (4). Условие (1) принимает вид $(da_0b)=0$. Отсюда находим однопараметрический пучок демиквадрик:

$$p=a_0+\left(\lambda a_2-\frac{1}{\lambda}a_3\right)t+a_5t^2, \tag{5}$$

гармонически пересекающих все линейчатые поверхности конгруенции и проходящих через произвольный луч пространства a_5.

Пусть теперь каждой прямой a_0 первой конгруенции поставлена в соответствие одна прямая пространства, ее не пересекающая, которую мы можем считать за a_5. Тогда a_5 пробегает вторую конгруенцию, для которой справедливо (3), причем из четырех форм ω_4^2, ω_4^1, ω_3^2, ω_3^1 лишь две независимые. Потребуем, чтобы весь пучок демиквадрик (5) пересекал гармонически все линейчатые поверхности второй конгруенции вдоль a_5. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $(da_5b)=0$, откуда находим $\omega_3^2=\omega_4^1=0$. Но условие $\omega_2^3=\omega_1^4=\omega_3^2=\omega_4^1=0$ есть точное условие того, что конгруенции a_0 и a_5 представляют пару T-конгруенций [1].

Необходимость условия легко доказывается.

Замечание. Свойство пары T-конгруенций, доказанное теоремой 1, может служить для ее определения.

5. Определение 2. Мы будем говорить, что два комплекса находятся в соответствии T, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие таким образом, что для каждой пары соответствующих лучей найдется демиквадрика, гармонически пересекающая оба комплекса (т. е. все их линейчатые поверхности) вдоль этих лучей.

Теорема 2. *Для того чтобы два комплекса находились в соответствии T, необходимо и достаточно, чтобы можно было выбрать репер таким образом, чтобы $\omega_1^4=\omega_2^3$ и $\omega_4^1=\omega_3^2$.*

Пусть дан один комплекс. Репер на нем может быть выбран таким образом, что $\omega_1^4=\omega_2^3$, причем луч a_5 в этом репере совершенно произволен. Тогда из условия (4) и $(da_0b)=0$ найдем единственную демиквадрику, гармонически пересекающую этот комплекс вдоль a_0 и проходящую через произвольный луч пространства a_5, $(a_0a_5)\neq 0$, в виде:

$$p=a_0+(a_2-a_3)t+a_5t^2. \tag{6}$$

Пусть каждой прямой первого комплекса a_0 поставлена в соответствие одна прямая a_5 пространства, ее не пересекающая. Тогда a_5 пробегает второй комплекс, для которого справедливо (3), причем из 4 форм ω_4^2, ω_4^1, ω_3^2, ω_3^1 лишь 3 линейно независимые.

Если эти два комплекса находятся в соответствии T, то демиквадрика (6) должна пересекать гармонически и второй комплекс. Тогда из (1) и $(da_5b)=0$ получаем единственное условие $\omega_4^1=\omega_3^2$.

Достаточность условия теоремы очевидна.

Верна также следующая теорема:

Теорема 3. *Для того чтобы два комплекса находились в соответствии T, необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный комплекс, имеющий касание первого порядка вдоль соответствующих образующих к обеим комплексам пары.*

В выбранном нами репере таким комплексом будет a_2-a_3.

6. Теорема существования. *Пара комплексов с установленным соответствием T существует с произволом, в общем случае, двух функций трех аргументов.*

Пара таких комплексов определяется системой:

$$\omega_1^4=\omega_2^3, \qquad \omega_4^1=\omega_3^2. \tag{7}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений дает:

$$[\chi\omega_2^3]-[\varphi\omega_1^3]+[\psi\omega_2^4]=0, \qquad [\chi\omega_3^2]+[\varphi\omega_4^2]-[\psi\omega_3^1]=0, \tag{8}$$

где $\chi=\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3-\omega_4^4$, $\varphi=\omega_2^1+\omega_3^4$, $\psi=\omega_1^2+\omega_4^3$.

Мы получили замкнутую дифференциальную систему. Построение интегральных элементов (4) в общем случае дает регулярную цепь, причем характеры $S_0=S_1=S_2=S_3=2$, откуда и следует теорема.

7. Матрицы приведенных полярных систем для $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ имеют, соответственно, вид:

$$\begin{Vmatrix} \omega_2^3 & -\omega_1^3 & \omega_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 & -\omega_3^1 & -\chi & \varphi & -\psi \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{Vmatrix} \omega_2^3 & -\omega_1^3 & \omega_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 & -\omega_3^1 & -\chi & \varphi & -\psi \\ \tilde\omega_2^3 & -\tilde\omega_1^3 & \tilde\omega_2^4 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde\omega_3^2 & \tilde\omega_4^2 & -\tilde\omega_3^1 & -\tilde\chi & \tilde\varphi & -\tilde\psi \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где в (10), если $\mathcal{E}_2=\mathcal{E}_2(d,\delta)$, то $\omega_i^j=\omega_i^j(d)$, $\tilde\omega_i^j=\omega_i^j(\delta)$.

Отсюда получаем два случая особых интегральных многообразований, указанных в теоремах 4 и 5.

Теорема 4. *Соответствие T двух комплексов, при котором все двумерные интегральные элементы $\mathcal{E}_2$ особые, существует с произволом одной функции 3 аргументов и является соответствием двух комплексов относительно нуль-системы.*

В этом случае должен снижаться ранг матрицы (9), что приводит к расширению основной системы (7), (8). Исследование этой новой системы и дает теорему.

Верно и обратное утверждение. Если задан комплекс a_0 и нуль-система, порожденная неспециальным линейным комплексом c, то комплекс a_5, получающийся из первого отображением относительно данной нуль-системы, будет находиться с ним в соответствии T, причем все $\mathcal{E}_2$ будут особыми.

Теорема 5. *Соответствие T двух комплексов, при котором все трехмерные интегральные элементы $\mathcal{E}_3$ особые, существует с произволом 7 функций одного аргумента.*

Этот случай мы получим при снижении ранга матрицы (10). В этом случае перенесение Плюкера дает, что на луче в P_5, соединяющем точки квадрики a_0 и a_5, найдется одна точка, которая движется по кривой. Через каждую точку c этой кривой будет проходить ∞^2 лучей, и соответствующие лучи a_0 и a_5 в P_5 будут пробегать пару конгруенций, соответствующих относительно нуль-системы, порожденной линейным комплексом c. Кроме того, в этом случае линейный комплекс a_2-a_3 также зависит от одного параметра (того же, что и c), и указанные выше пары конгруенций принадлежат этим комплексам.

8. Паре T-комплексов в P_3 соответствует в P_5 при перенесении Плюкера фокальная конгруенция ∞^3 лучей, т. е. такое 3-параметрическое многообразие лучей, что на каждом луче имеется 3 фокуса и через каждый луч проходит 3 развертывающихся поверхности.

Действительно: в фокусах луча должно быть $d(xa_0+a_5)=\lambda a_0+\mu a_5$, откуда получаем 3 уравнения:

$$\omega_4^2=-x\omega_1^3, \quad \omega_3^2=x\omega_2^3, \quad \omega_3^1=-x\omega_2^4,$$

из которых лишь 2 должны быть независимыми. Это будет выполняться в общем случае при 3 различных значениях x, соответствующим 3 фокусам. Каждому x, в силу снижения ранга, будет соответствовать развертывающаяся поверхность.

Легко доказывается и обратное: фокальной конгруенции лучей в P_5 соответствует в P_3 пара T-комплексов.

Заметим, что в нашем случае окрестность первого порядка луча в P_5 будет не 5-, а 4-мерной.

9. Применим рассмотренное преобразование T-комплекса к определенной А. М. Васильевым [3] инволютивной системе комплексов, которая определяется системой уравнений:

$$[D(\omega_1^3-\omega_2^4), \omega_1^3-\omega_2^4]=0, \quad [D(\omega_1^3+\omega_2^4), \omega_1^3+\omega_2^4]=0,$$
$$[D(\omega_2^3+\omega_1^4), \omega_2^3+\omega_1^4]=0, \quad [D(\omega_2^3-\omega_1^4), \omega_2^3-\omega_1^4]=0. \tag{11}$$

Мы будем считать заданной одну инволютивную систему и искать вторую так, чтобы соответствующие комплексы обеих систем находились в соответствии T.

Если обозначить

$$\vartheta_1=\omega_1^3-\omega_2^4,\quad \vartheta_2=\omega_1^3+\omega_2^4,\quad \vartheta_3=\omega_2^3+\omega_1^4,\quad \vartheta_4=\omega_2^3-\omega_1^4,$$
$$\bar\vartheta_1=\omega_4^2-\omega_3^1,\quad \bar\vartheta_2=\omega_4^2+\omega_3^1,\quad \bar\vartheta_3=-\omega_4^1-\omega_3^2,\quad \bar\vartheta_4=-\omega_4^1+\omega_3^2,$$

то задача сводится к исследованию системы:

$$[\vartheta_i, \bar\vartheta_i]=0, \qquad i=1, 2, 3, 4,$$

при условии, что система:

$$[D\vartheta_i, \vartheta_i]=0, \qquad i=1, 2, 3, 4,$$

удовлетворена. Исследование показывает, что система находится в инволюции. В общем случае вторая инволютивная система существует с произволом 4 функций одного аргумента.

Геометрический смысл пары инволютивных систем следующий. Рассмотрим перенесение Плюкера такой пары. Фокусы луча $[a_0 a_5]$ определяются уравнениями $\bar\vartheta_i=x\vartheta_i$. Но на интегральном многообразии, в силу (12), $\bar\vartheta_i=\alpha_i\vartheta_i$. Следовательно, $(\alpha_i-x)\vartheta_i=0$. Отсюда следует, что на каждом луче при различных α_i получаем 4 фокуса $x_i=\alpha_i$. Каждому фокусу x_i соответствует развертывающаяся поверхность $\vartheta_j=0$, $j\neq i$.

Если мы рассмотрим пару комплексов, получающуюся при $\vartheta_i=0$, то для нее фокусами луча будут x_j, $j\neq i$. Если же мы рассмотрим пару конгруенций $\vartheta_i=\vartheta_j=0$, $i\neq j$, то получим пару конгруенций W [3], находящихся в соответствии T. Фокусы луча для нее будут x_k, $k\neq i$, $k\neq j$. Наконец, при $\vartheta_i=\vartheta_j=\vartheta_k=0$, $i\neq j$, $j\neq k$, $k\neq i$ получаем расслояемую пару линейчатых поверхностей [5].

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. С. П. Финикову, под непосредственным руководством которого была выполнена эта работа.

Поступило
12 V 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937. [2] E. Cartan, Bull. section scientifique Acad. roumaine, 14, 167 (1931). [3] А. М. Васильев, ДАН, 61, № 2 (1948). [4] E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leur applications géométriques, Paris, 1945. [5] С. П. Фиников, Изв. АН СССР, сер. математ., 9, 79 (1945).