Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Член-корреспондент АН СССР Н. В. БЕЛОВ

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ (СИММЕТРИЧЕСКИЕ) МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Указанный в предыдущем сообщении ([1]) прием решения задач с тройной, а также четверной и шестерной осями симметрии вполне общий. Идея метода—введение добавочных горизонтальных координатных осей так, чтобы общее их число равнялось порядку вертикальной оси симметрии,—принадлежит Е. С. Федорову ([2]), но он развивал его в применении не к привычным контравариантным координатам (параллельным осям), а к координатам ковариантным, т. е. перпендикулярным к осям. Метод одинаково силен и в контравариантных координатах. В предыдущем сообщении ([1]) это было показано для тройной и четверной оси, сейчас мы применим его для излюбленного Е. С. Федоровым случая пятерной оси.

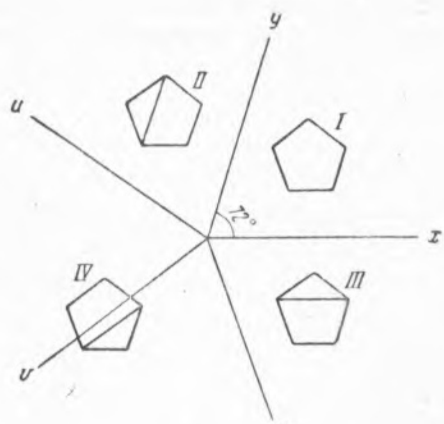

Рис. 1

Две горизонтальные оси x и y расположены под углом $72° = 360° : 5$. Дана точка с координатами mnp; требуется определить положение четырех симметричных, если с вертикальной осью z совпадает пятерная ось симметрии. Вводим (рис. 1) три добавочных горизонтальных оси u, v, w, симметричных к x и y. Координаты всех пяти нужных точек будут:

1) $mn000p$, 2) $0mn00p$, 3) $00mn0p$, 4) $000mnp$ и 5) $n000mp$.

Маленькие пятиугольники на рис. 1 показывают, что положение любой точки не изменится не только тогда, когда (случай I) к каждой из пяти горизонтальных координат будет прибавлено по равному отрезку, но также если (случай II) к координатам u и x прибавить по произвольному a, а к y отрезок $-Aa$, где $A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$; аналогично (случай III), если к w и y прибавить по a, а к x отрезок $-Aa$, и, наконец (случай IV), если к x и y прибавить по произвольному b, а к v отрезок $+b:A$ с тем же значением A (или, что то же, к v произвольное b, а к x и y по Ab).

Эти элементарные теоремы позволяют нам избавиться от дополнительных координат для точек 2 и 5 в один прием и для точек 3 и 4 в два приема с окончательным результатом:

$$1)\ mnp;\ 2)\ -n,\ m+An,\ p;\ 3)\ -m-An,\ A(m-n),\ p;$$
$$4)\ A(n-m),\ -Am-n,\ p;\ 5)\ Am+n,\ -m,\ p.$$

Всюду A имеет одно и то же значение $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

В матричной форме наш результат может быть переписан так.

Если $\begin{bmatrix}100\\010\\001\end{bmatrix}$ обозначим через E, то $\left(\sqrt[5]{E}\right)_1=\begin{bmatrix}100\\010\\001\end{bmatrix}$;

$$\left(\sqrt[5]{E}\right)_2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & A & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \left(\sqrt[5]{E}\right)_3=\begin{bmatrix}-1 & -A & 0\\A & -A & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\left(\sqrt[5]{E}\right)_4=\begin{bmatrix}-A & +A & 0\\-A & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix};\quad \left(\sqrt[5]{E}\right)_5=\begin{bmatrix}A & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\text{а также}\ \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & A & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1 & -A & 0\\A & -A & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\ \text{и т. д.,}$$

причем всегда должно иметь в виду $A^2+A-1=0$.

Метод основывается на параллельности диагонали правильного пятиугольника к одной из сторон. Так как это свойство характеризует всякую диагональ любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон, то способ без труда применим для вращения вокруг семерной, девятерной и т. д. осей симметрии, хотя выражения для коэффициентов A уже не будут простыми радикальными. Всегда можно ограничиться одним наиболее простым треугольником: диагональ + две стороны, и выражения для остальных точек получить повторным матричным умножением.

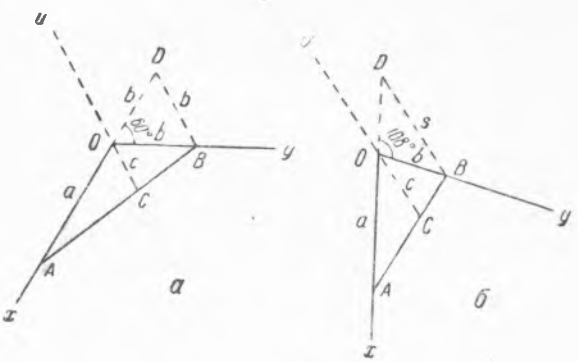

Рис. 2

В случае пятерной (и более высоких) оси естественен вопрос об аналоге той основной теоремы для тройной оси, которая требует равенства нулю суммы трех индексов по горизонтальным осям.

Наиболее просто последняя выводится из рис. 2, *а*. В нем треугольник OBD равносторонний, и потому подобие треугольников ACO и ACD дает: $\frac{b}{c}=\frac{a+b}{a}$ или $\frac{1}{c}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$, т. е. $-i=h+k$.

В случае пятерной симметрии для осей, например x, y и v, имеем (рис. 2, *б*) не равносторонний, а равнобедренный треугольник OBD с углом при вершине 108°. Отрезок $s=b/A$, где $A=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, и мы будем иметь $-h_4=A\ (h_1+h_2)$, т. е. четвертый индекс равен сумме двух первых, помноженной на постоянное число $-A$.

Не представляет затруднений распространить эту теорему на два других индекса при пятерной оси и на случай оси более высокого порядка.

Поступило
18 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Белов, ДАН, 58, 465 (1947). [2] Е. С. Федоров, Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде, СПб, 1888; Зап. Мин. об-ва, 25, 1 (1889).