Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. А. СВЕКЛО

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И ВОЛНЫ РЕЛЕЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 XII 1947)

1. Вопросом распространения и отражения упругих волн в однородной изотропной среде занимались многие авторы. Наиболее полное решение задачи в случае плоских колебаний дано в работах академиков С. Л. Соболева и В. И. Смирнова. Сущность их метода заключается в использовании так называемых функционально-инвариантных решений волнового уравнения, т. е. таких решений, произвольная функция которых есть также решение волнового уравнения.

В настоящей работе мы даем обобщение этого метода на случай анизотропной среды и рассматриваем плоские волны и волны Релея для упругой анизотропной полуплоскости. В следующей работе мы будем рассматривать задачу об источнике колебания в упругой полуплоскости. Начнем с аналога функционально-инвариантных решений для системы уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{\alpha,\beta,q=1}^{2} a_{\alpha\beta}^{pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} \qquad (p=1, 2). \tag{1}$$

Определим функцию $\Omega(x_\alpha, t)$ соотношением:

$$l(\Omega)t + m_1(\Omega)x_1 + m_2(\Omega)x_2 + K(\Omega) = 0, \tag{2}$$

где $K(\Omega)$ — какая-либо фиксированная функция, а функции l, m_α связаны условием:

$$\left\| \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}^{pq} m_\alpha m_\beta - \delta_{pq} l^2 \right\| = 0 \qquad (p, q = 1, 2), \tag{3}$$

где δ_{pq} — символ Кронекера. При фиксированных m_α условие (3) дает четыре значения для l, что, в силу (2), приводит к четырем функциям $\Omega(x_\alpha, t)$. Система (1) имеет при этом решение вида:

$$u_i = \sum_{k=1}^{4} \int^{\Omega_k} A_{ik}(t)\,\omega_k(t)\,dt \qquad (i=1, 2), \tag{4}$$

где

$$A_{1k}(t) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}^{12} m_\alpha m_\beta, \qquad A_{2k}(t) = l_k^2(t) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}^{11} m_\alpha m_\beta \tag{5}$$

и $\omega_k(t)$ — произвольные функции. Формула (4) дает аналог функционально-инвариантных решений для системы (1).

Если Ω_k комплексны, то $\omega_k(t)$ должны быть аналитическими функциями, и надо брать вещественную часть указанных выражений.

Если мы возьмем m_α и l постоянными и положим $K(\Omega) \equiv -\Omega$, то получим „плоские“ волны. Формулу (4) можно в данном случае записать в виде:

$$u_i = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Re}\,[A_{ik}\,\omega_k(\Omega_k)] \qquad (i=1, 2), \tag{6}$$

где $\omega_k(t)$ — произвольные функции.

2. Рассмотрим тот случай анизотропии, при котором для составляющих (u, v) вектора упругого смещения в плоском случае получается система:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ c\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \qquad (7)$$

Упругие постоянные должны удовлетворять неравенству $c\leqslant\sqrt{ab}+d$ и, кроме того, считаем $a>d$ и $b>d$. Случай изотропного тела получается при $b=a$, $c=a-d$. Полагая в (2) $l=1$, $m_1=-\theta$, $m_2=\lambda$, $K(\Omega)=-\Omega$, получим $\Omega=t-\theta x+\lambda y$, где λ определяется из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a\theta^2+d\lambda^2-1 & c\theta\lambda \\ c\theta\lambda & d\theta^2+b\lambda^2-1 \end{vmatrix}=0. \qquad (8)$$

Если, например, $0<\theta<1/a$, то все корни этого уравнения вещественны. Обозначим их через $\pm\lambda_k$ $(k=1, 2)$, причем λ_1 — тот корень, который обращается в $\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}$ при $b=a$, $c=a-d$. Плоские волны, зависящие от аргументов $t-\theta x+\lambda_k y$, $t-\theta x-\lambda_k y$, назовем, соответственно, падающими и отраженными.

Рассмотрим полуплоскость $y>0$ со свободной границей, т. е.

$$Y_y\Big|_{y=0}=(c-d)\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0}=0;\ X_y\Big|_{y=0}=(c-d)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}=0 \quad (9)$$

и будем по заданной падающей волне определять отраженные.

Зададимся падающей волной 1-го типа:

$$u_1=c\theta\lambda_1\ w(t-\theta x+\lambda_1 y);\quad v_1=(a\theta^2+d\lambda_1^2-1)\quad w(t-\theta x+\lambda_1 y). \quad (10)$$

Отраженные волны будем искать в форме:

$$\begin{aligned} u_{-1}&=-c\theta\lambda_1\quad w(t-\theta x-\lambda_1 y)A,\\ v_{-1}&=(a\theta^2+d\lambda_1^2-1)\quad w(t-\theta x-\lambda_1 y)A; \end{aligned} \qquad (11^1)$$

$$\begin{aligned} u_{-2}&=-c\theta\lambda_2\quad w(t-\theta x-\lambda_2 y)B,\\ v_{-2}&=(a\theta^2+d\lambda_2^2-1)\quad w(t-\theta x-\lambda_2 y)B. \end{aligned} \qquad (11^2)$$

Постоянные A и B должны быть определены из граничных условий (9). Производя выкладки, получим

$$u_{-1}=\frac{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}+\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}}{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}-\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}}\times$$

$$\times\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}u_1(t-\theta x-\lambda_1 y), \qquad (12^1)$$

$$v_{-1}=-\frac{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}+\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}}{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}+\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}}\times$$

$$\times\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}v_1(t-\theta x-\lambda_1 y);$$

$$u_{-2}=\frac{\{[ab-c(c-d)]\,\theta^2+bd\lambda_1^2-b\}\,[a\theta^2-(c-d)\,\lambda_1^2-1]}{c\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}\left[\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}-\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}\right]}\times$$

$$\times\frac{2\lambda}{\lambda_1-\lambda_2}\,u_1(t-\theta x-\lambda_2 y), \tag{12^2}$$

$$v_{-2}=$$

$$=\frac{(a\theta^2+d\lambda_2^2-1)\,\{[ab-c(c-d)]\,\theta^2+bd\lambda_1^2-b\}\,[a\theta^2-(c-d)\,\lambda_1^2-1]}{c\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}(a\theta^2+d\lambda_1^2-1)\left[\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}-\sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2}\right]}\times$$

$$\times\frac{-2\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\,v_1(t-\theta x-\lambda_2 y).$$

Если в падающей волне (10) заменить λ_1 на λ_2, то (если $0<\theta<1/a$) для отраженных волн получим аналогичные формулы. Для $|\theta|<1/d$ величина $\lambda_1=i\tilde{\lambda}_1$ чисто мнима, а λ_2 вещественна. Падающей волне

$$\begin{aligned} u_2&=c\theta\lambda_2\quad w(t-\theta x+\lambda_3 y),\\ v_2&=(a\theta^2+d\lambda_2^2-1)\quad w(t-\theta x+\lambda_2 y)\end{aligned} \tag{13}$$

будет отвечать отраженное возмущение, описываемое формулами:

$$u_{-2}=\mathrm{Re}\left[\frac{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\mp\sqrt{ab}\,i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}}{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\pm\sqrt{ab}\,i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\lambda_2\mp i\tilde{\lambda}_1}{\lambda_2\pm i\tilde{\lambda}_1}\,f(t-\theta x-\lambda_2 y)\right], \tag{14^1}$$

$$v_{-2}=\mathrm{Re}\left[-\frac{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\mp\sqrt{ab}\,i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}}{\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\pm\sqrt{ab}\,i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\lambda_2\mp i\tilde{\lambda}_1}{\lambda_2\pm i\tilde{\lambda}_1}\,f(t-\theta x-\lambda_2 y)\right];$$

$$u_1=\mathrm{Re}\left[\frac{\{[ab-c(c-d)]\,\theta^2+bd\lambda_2^2-b\}\,[a\theta^2-(c-d)\,\lambda_2^2-1]}{c\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}\left[\{[ab-(c-d)^2]\,\theta^2-b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\pm i\sqrt{ab}\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{2\tilde{\lambda}_1}{\lambda_2\pm i\lambda_1}\,f(t-\theta x\pm i\tilde{\lambda}_1 y)\right], \tag{14^2}$$

$$v_1 = \operatorname{Re}\left[\frac{\left[a\theta^2-(c-d)\lambda_2^2-1\right]\left(a\theta^2-d\tilde{\lambda}_1^2-1\right)\left\{[ab-c(c-d)]\theta^2+bd\lambda_2^2-b\right\}}{c\sqrt{\frac{a}{b}}\, i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}\left(a\theta^2+d\lambda_2^2-1\right)\left[\left\{[ab-(c-d)^2]\theta^2-b\right\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2}\pm\sqrt{ab}\, i\sqrt{\theta^2-\frac{1}{a}}\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{-2\lambda_2}{\lambda_2\pm i\lambda_1} f\left(t-\theta x\pm i\tilde{\lambda}_1 y\right)\right],$$

где f — регулярная в верхней или нижней полуплоскости функция, определяемая по заданной вещественной функции $w(x)$. Мы имеем здесь случай полного внутреннего отражения.

3. Построим решение нашей задачи, имеющее вид

$$u = u_1 + u_2, \qquad v = v_1 + v_2, \tag{15}$$

где

$$u_1 = \pm c\theta\lambda_1 \quad w(t-\theta x \pm \lambda_1 y),$$
$$v_1 = (a\theta^2 + d\lambda_1^2 - 1) \quad w(t-\theta x \pm \lambda_1 y); \tag{16¹}$$

$$u_2 = \pm c\theta\lambda_2 \quad w(t-\theta x \pm \lambda_2 y)\, A,$$
$$v_2 = (a\theta^2 + d\lambda_2^2 - 1) \quad w(t-\theta x \pm \lambda_2 y)\, A; \tag{16²}$$

A — постоянная, подлежащая определению.

Подставляя в граничные условия (9), получим уравнение для θ:

$$R(\theta) = \{[ab-(c-d)^2]\theta^2 - b\}\sqrt{\frac{1}{d}-\theta^2} - \sqrt{ab}\sqrt{\frac{1}{a}-\theta^2} = 0. \tag{17}$$

Функцию $R(\theta)$ следует назвать функцией Релея рассматриваемой анизотропной среды. На выбранном соответствующим образом листе римановой поверхности эта функция имеет два вещественных корня $\pm 1/k$, $k < d$. Запишем λ_1, λ_2 в форме:

$$\lambda_1 = \sqrt{M(\theta) - \sqrt{M^2(\theta) - N(\theta)}}, \qquad \lambda_2 = \sqrt{M(\theta) + \sqrt{M^2(\theta) - N(\theta)}},$$

где

$$M(\theta) = \frac{b+d-(ab+d^2-c^2)\theta^2}{2bd}, \qquad N(\theta) = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{a}-\theta^2\right)\left(\frac{1}{d}-\theta^2\right).$$

Рассмотрим следующие два случая:

$$M\left(\pm\frac{1}{k}\right) < 0, \qquad M^2\left(\pm\frac{1}{k}\right) - N\left(\pm\frac{1}{k}\right) > 0, \tag{18¹}$$

$$M\left(\pm\frac{1}{k}\right) \begin{matrix}\leqslant 0\\ \geqslant 0\end{matrix}, \qquad M^2\left(\pm\frac{1}{k}\right) - N\left(\pm\frac{1}{k}\right) < 0. \tag{18²}$$

В первом случае λ_1, λ_2 чисто мнимы. Выбирая в формулах (16) в качестве w функцию, регулярную в верхней (нижней) полуплоскости, получим аналог волн Релея.

Во втором случае λ_1, λ_2 комплексны. При соответствующем выборе корней λ_1 и λ_2 и функции w получим также волны Релея. Неравенства (18) определяют классы анизотропных тел, для которых имеет место тот или иной тип волн Релея.

Мы рассмотрели здесь случай четырех упругих постоянных. Сюда относится целый ряд важных анизотропных тел, в частности ортотропные тела. В общем случае анизотропии упругий потенциал плоской задачи зависит от шести упругих постоянных. Формально основные результаты могут быть получены так же, как выше. Однако формулы при этом получаются громоздкими, что затрудняет толкование.

Карело-Финский университет
Петрозаводск

Поступило
8 XII 1947