Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

АЭРОДИНАМИКА

Ю. В. РУДНЕВ

О НЕКОТОРЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГАЗА С ПЕРЕМЕННОЙ ЭНТРОПИЕЙ И ПОЛНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 3 XII 1947)

Рассмотрим плоско-параллельное установившееся адиабатическое движение идеального совершенного газа.

Пусть ψ — функция тока; $\mathfrak{v}(\psi)$ — скорость частиц газа; $\mathfrak{v}_0(\psi)$ — максимальная возможная скорость; θ — угол наклона скорости к оси x; $z=x+iy$; $\tau=\mathfrak{v}^2/\mathfrak{v}_0^2$; $\vartheta(\psi)=p/\rho^\gamma$ — функция, связанная с энтропией; p — давление; ρ — плотность; γ — коэффициент Пуассона.

Уравнение Бернулли можно написать в виде

$$\tau=1-\left[\frac{p}{f(\psi)}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \text{где} \quad f(\psi)=\left[\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{\mathfrak{v}_0^2(\psi)}{\vartheta(\psi)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Дальнейшие выводы касаются случая, когда $f(\psi)=\text{const}$.

В этом случае, как показано Л. И. Седовым, должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial\tau}=\frac{\rho_0(\gamma-1)\,\mathfrak{v}_0(\psi)}{\gamma f}\,\frac{\sqrt{\tau}}{(1-\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}}\left[\frac{\dfrac{(\gamma+1)\tau-(\gamma-1)}{4(\gamma-1)\tau^2(1-\tau)}-\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\tau}}\right]e^{i\theta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\psi}=\frac{\rho_0(\gamma-1)\,\mathfrak{v}_0(\psi)}{\gamma f}\,\frac{\sqrt{\tau}}{(1-\tau)^{\frac{1}{\gamma-1}}}\left[\frac{i}{2\tau}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right]e^{i\theta}, \tag{1}$$

где ρ_0 — некоторое постоянное.

Условие интегрируемости уравнений (1) имеет вид:

$$\left[\Phi(\psi)\frac{\partial\theta}{\partial\psi}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\psi^2}\right]\left[Q(\tau)-\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)^2\right]-2\,\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\,\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau\,\partial\psi}=$$

$$=P(\tau)\,\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)^2-\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\right)^2, \tag{2}$$

где $\Phi(\psi)=\dfrac{\mathfrak{v}_0'(\psi)}{\mathfrak{v}_0(\psi)}$, $Q(\tau)=\dfrac{(\gamma+1)\tau-(\gamma-1)}{4(\gamma-1)\tau^2(1-\tau)}$, $P(\tau)=\dfrac{(\gamma-2)\tau-(\gamma-1)}{\tau(1-\tau)(\gamma-1)}$.

Взяв в качестве независимых переменных θ и τ из уравнения (2) получим уравнение для определения ψ:

$$Q(\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+P(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\Phi(\psi)\left[Q(\tau)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2\right]=0. \qquad (3)$$

Заметим, что квазилинейное уравнение вида

$$a\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\psi}{\partial x}+e\frac{\partial\psi}{\partial y}+$$

$$+\Phi(\psi)\left[a\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+b\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]=0, \qquad (4)$$

где a, b, c, d, e являются функциями только x и y, подстановкой

$$\psi^*=\int e^{\int\Phi(\psi)\,d\psi}d\psi \qquad (5)$$

приводится к линейному уравнению

$$a\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^2}+d\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+e\frac{\partial\psi^*}{\partial y}=0. \qquad (6)$$

Применяя преобразование (5) к уравнению (3), приведем последнее к виду

$$Q(\tau)\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\tau^2}+P(\tau)\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{2\tau(1-\tau)^{-\beta}\frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)}(1-\tau)^{-\beta}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\theta^2}=0, \qquad (8)$$

где $\beta=\dfrac{1}{\gamma-1}$.

Уравнение (8) совпадает с уравнением, полученным С. А. Чаплыгиным [1] для функции тока при изучении изоэнтропических движений газа с постоянной полной энергией.

Таким образом, очевидно, что каждому движению газа при $\mathfrak{v}_0=\text{const}$, $\vartheta=\text{const}$ с функцией тока ψ^* соответствует движение газа с той же системой линий тока, в которой $\vartheta(\psi)/\mathfrak{v}_0^2(\psi)=\text{const}$. Функции тока этих двух течений ψ и ψ^* связаны соотношением

$$\psi^*=\int\mathfrak{v}_0(\psi)\,d\psi. \qquad (9)$$

Поступило
3 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, О газовых струях, Полн. собр. соч., II, 1934.