Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Я. ХИНЧИН

К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть θ_{ij}, α_j $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — вещественные числа; положим

$$S_j = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j,\ \ T_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} u_j - v_i\,(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n),\ u = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j|,$$

$$T = T(u_j, v_i) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |T_i|,\ \ A = A(u_j) = \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j - w \right|,$$

где w — ближайшее к $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ целое число, так что $0 \leqslant A \leqslant \frac{1}{2}$.

Известная общая апроксимационная теорема Кронекера утверждает: *для того чтобы система неравенств* $|S_i - \alpha_j| < \frac{1}{t}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *при любом* $t > 0$ *допускала решение в целых* x_i, y_j, *необходимо и достаточно, чтобы для любой системы целых* u_j, v_i, *для которой* $T = 0$, *мы имели также* $A = 0$.

Эта теорема принципиально решает вопрос о том, при каких условиях данная система линейных уравнений $S_j - \alpha_j = 0$ может быть с любой степенью точности приближенно разрешима в целых числах. Недавно я доказал следующую общую теорему, дающую существенное количественное дополнение к теореме Кронекера:

Для существования таких положительных постоянных c_1 *и* c_2, *что система неравенств*

$$|S_j - \alpha_j| < \frac{c_1}{t},\quad |x_i| < c_2 \varphi(t)\quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — *положительная непрерывная неубывающая функция положительного аргумента* t, *при любом* $t > 0$ *имеет целочисленные решения* x_i, y_j, *необходимо и достаточно существование такой положительной постоянной* Γ, *что для любой системы целых чисел* u_j, v_i

$$A \left\{ \begin{array}{l} = 0,\ \text{если } uT = 0, \\ < \dfrac{\Gamma u}{\Psi\left(\dfrac{u}{T}\right)},\ \text{если } uT > 0, \end{array} \right\} \tag{2}$$

где $\Psi(t)$ *означает функцию, обратную к функции* $t\varphi(t)$.

Это предложение представляет интерес потому, что из него в качестве простых следствий могут быть выведены почти все теоремы, доказанные до настоящего времени в общей теории неоднородных линейных диофантовых приближений. В настоящей заметке я покажу, что из него почти непосредственно вытекают две важные теоремы, доказанные Ярником ([1]) несколько лет тому назад.

1. Пусть система чисел θ_{ij} такова, что для любой системы целых чисел u_j, v_i, для которой $u>0$, мы имеем

$$T > \frac{\gamma}{\varphi(u)}, \tag{3}$$

где $\gamma>0$ — постоянная; без ограничения общности мы можем допустить $\gamma<1$. Очень легко показать, что функция $\Psi(t)$ при $c>1$ удовлетворяет неравенству $\Psi(ct)\leqslant c\Psi(t)$. Поэтому мы находим

$$\frac{u}{T} < \frac{u\varphi(u)}{\gamma}, \quad \Psi\left(\frac{u}{T}\right) < \Psi\left(\frac{u\varphi(u)}{\gamma}\right) \leqslant \frac{1}{\gamma}\Psi[u\varphi(u)] = \frac{u}{\gamma},$$

$$\frac{u}{\Psi\left(\frac{u}{T}\right)} > \gamma.$$

Таким образом, если выбрать $\Gamma > \frac{1}{\gamma}$, то для любой системы целых чисел u_j, v_i мы будем иметь

$$\frac{\Gamma u}{\Psi\left(\frac{u}{T}\right)} > 1.$$

Но в таком случае условие (2) тривиальным образом выполняется для любой системы вещественных чисел α_j. В силу моего критерия поэтому условие (3) влечет за собою целочисленную разрешимость неравенств (1) при любых α_j, надлежаще выбранных постоянных c_1, c_2 и любом достаточно большом t. Это составляет содержание первой теоремы Ярника.

2. Пусть теперь существует такая постоянная $C>0$ (без ограничения общности можно допустить $C>1$), что

$$T < \frac{C}{\varphi(u)} \tag{4}$$

для бесчисленного множества систем целых чисел u_j, v_i, в том числе и систем со сколь угодно большим u. Обозначим через E множество таких систем вещественных чисел α_j $(1\leqslant j\leqslant n)$, для которых неравенства (1) при сколь угодно малых c_1 и c_2 имеют целочисленные решения, если t достаточно велико. Вторая теорема Ярника утверждает, что при условии (4) мера множества E в n-мерном пространстве точек $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ равна нулю. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что, как мною доказано, для точки (α_j), принадлежащей множеству E, мы имеем, сколь бы мало ни было $\varepsilon>0$, для всех систем целых чисел u_j, v_i с достаточно большим u и $T>0$

$$A < \frac{\varepsilon u}{\Psi\left(\frac{u}{T}\right)}. \tag{5}$$

Обозначим через E_r $(r = 1, 2, \ldots)$ совокупность тех точек (α_j) множества E, для которых неравенство (5) имеет место при $u > r$, так что $E_r \subset E_{r+1}$ и $E = \sum_{r=1}^{\infty} E_r$.

Из (4) вытекает

$$\frac{u}{T} > \frac{1}{C} u\varphi(u), \quad \Psi\left(\frac{u}{T}\right) > \Psi\left(\frac{1}{C} u\varphi(u)\right) \geqslant \frac{1}{C} \Psi[u\varphi(u)] = \frac{u}{C},$$

$$\frac{\varepsilon u}{\Psi\left(\frac{u}{T}\right)} < \varepsilon C \tag{6}$$

для бесчисленного множества систем целых чисел u_j, v_i со сколь угодно большим значением u, так что мы можем допустить $u > r$. Но тогда из (5) и (6) следует, что

$$A < \varepsilon C$$

для любой точки (α_j) множества E_r. Очевидно, что множество точек (α_j), удовлетворяющих этому неравенству, в любом фиксированном объеме имеет меру, не превосходящую произведения некоторой постоянной на ε; этого произведения не превосходит, следовательно, мера множества E_r при любом r, а значит и мера множества E. Так как ε произвольно мало, то мера множества E равна нулю.

3. Заметим, наконец, что, если существует такая постоянная $B > 0$, что функция $t^{-B}\varphi(t)$ убывает при достаточно большом t, то условие (3), в силу первой теоремы Ярника достаточное для целочисленной разрешимости системы неравенств (1) при любых α_j, надлежаще выбранных c_1, c_2 и любом $t > 0$, является вместе с тем и необходимым для этой цели. Это может быть легко доказано с помощью рассуждения, аналогичного только что нами проведенному.

Поступило
26 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Jarnik, Čas. pěst. Mat. Fys., 68, 103 (1939).