Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

О. В. САРМАНОВ

О ВЫПРЯМЛЕНИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 XII 1947)

1. Пусть имеется несимметрическая функция распределения двух переменных $F(x, y)$, определяющая корреляцию во всей плоскости. Если корреляция криволинейна, т. е. м. о.$_x$ $y = f_1(x)$ и м. о.$_y$ $x = f(y)$ — нелинейные функции, требуется найти такие преобразования переменных $X = \varphi(x)$, $Y = \psi(y)$, что корреляция между X и Y будет уже прямолинейна. Если такие преобразования существуют, корреляция называется выпрямляемой.

Задача о выпрямлении корреляции эквивалентна задаче нахождения пары монотонных решений у системы так называемых корреляционных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy, \\ \psi(y) &= \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{F(x, y)}{P(y)}\, dx, \end{aligned} \tag{1'}$$

где $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, dy$; $P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, dx$ — априорные плотности распределения x и y соответственно.

Как следует из общей теории фундаментальных функций Гильберта — Шмидта, система (1') эквивалентна системе двух интегральных уравнений с симметризуемыми ядрами:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{F_1(x, y)}{p(x)}\, dy, \\ \psi(y) &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{F_2(x, y)}{P(y)}\, dx, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x, t)\, F(y, t)}{P(t)}\, dt, \\ F_2(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t, x)\, F(t, y)}{p(t)}\, dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Как видно из (2), функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ симметричны, кроме того, обе они функции распределения; априорные плотности $F_1(x, y)$ равны, соответственно, $p(x)$ и $p(y)$, а априорные плотности $F_2(x, y)$ — $P(x)$ и $P(y)$. Из эквивалентности систем уравнений (1') и (1) вытекает следующая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы несимметрическая корреляция была выпрямляема, необходимо и достаточно, чтобы обе симметрические корреляции, определяемые симметризуемыми ядрами* (2), *были выпрямляемыми.*

2. Вопрос о выпрямлении симметрической корреляции разобран нами ранее [1], причем был указан ряд достаточных условий, наиболее общее из которых оказалось и необходимым в случае простого первого фундаментального числа.

Все выводы [1] сделаны в предположении интегрируемости квадратов симметризованных ядер по обеим переменным, т. е. при условии:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1^2(x, y)}{p(x)\,p(y)}\,dx\,dy<\infty,\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_2^2(x, y)}{P(x)\,P(y)}\,dx\,dy<\infty.\end{gathered}\tag{3}$$

Условия (3) будут выполнены, если на исходную несимметрическую функцию распределения $F(x, y)$ наложить условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^2(x, y)}{p(x)\,P(y)}\,dx\,dy=K^3<\infty.\tag{3'}$$

Как было показано в [2], простейшее условие, обеспечивающее монотонность первой фундаментальной функции корреляционных интегральных уравнений с симметризуемыми ядрами, в случае дифференцируемости ядер таково: функции

$$\begin{gathered}\Psi_1(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{F_1(x, t)}{p(x)}\,dt,\\ \Psi_2(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{F_2(y, t)}{P(y)}\,dt\end{gathered}\tag{4}$$

должны быть знакопостоянны при всех x и y.

Для обеспечения (4) на исходную функцию $F(x, y)$ достаточно наложить аналогичные ограничения: функции

$$\begin{gathered}\Omega_1(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{F(x,t)}{p(x)}\,dt,\\ \Omega_2(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{F(t, y)}{P(y)}\,dt\end{gathered}\tag{4'}$$

должны быть знакопостоянны при всех x и y.

В самом деле, подставляя в (4) выражения $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ из (2) и интегрируя по частям, получим:

$$\Psi_1(x, y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(x, t)\,\Omega_2(y, t)\,dt,$$

$$\Psi_2(x, y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(z, x)\,\Omega_2(z, y)\,dz,$$

и из знакопостоянства $\Omega_1(x, y)$ и $\Omega_2(x, y)$ следует знакопостоянство функций $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$.

Отсюда немедленно получаем теорему (см. ([2])).

Теорема 2. *Если функции* $\Omega_1(x, y)$, $\Omega_2(x, y)$, *определяемые* (4'), *знакопостоянны при всех* x *и* y, *то при соблюдении* (3') *имеется единственная пара монотонных фундаментальных функций системы* (1'), *принадлежащая первому характеристическому числу* $|\lambda_1| > 1$.

(В ([2]) показано, что все характеристические числа корреляционного интегрального уравнения по модулю больше 1).

3. Эти монотонные фундаментальные функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(y)$ могут быть найдены из уравнений (1) методом последовательных приближений, описанным в ([2]).

Приняв эти функции за новые переменные $X = \varphi_1(x)$, $Y = \psi_1(y)$, мы между X и Y получим прямолинейную корреляцию с коэффициентом корреляции $R = 1/\lambda_1$, и задача о выпрямлении несимметричной корреляции будет решена до конца.

Условия знакопостоянства функций $\Omega_1(x, y)$ и $\Omega_2(x, y)$ означают, что условная интегральная функция распределения y при данном x есть монотонная функция x и, точно так же, условная интегральная функция распределения x при данном y есть монотонная функция y. Геометрически это означает, что графики условных интегральных функций y при разных x не должны пересекаться и графики условных интегральных функций x при разных y не должны пересекаться.

Более общие достаточные условия существования монотонных решений y корреляционных уравнений (1) изложены в ([1]). Эти условия касаются итерированных ядер уравнений (1) и, следовательно, в конечном счете, итерированных ядер уравнений (1'); мы не будем их приводить, так как в виду эквивалентности систем (1) и (1') они для системы (1') получаются без труда.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
6 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, ДАН, **58**, № 5 (1947). [2] О. В. Сарманов, ДАН, **53**, № 9 (1946).