Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. С. САЛЕХОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ОБЛАСТИ СКОЛЬ УГОДНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 XII 1947)

1. В настоящей заметке сообщаются результаты исследования условий существования a priori аналитического по t решения уравнения

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \varepsilon t^m \frac{\partial^q z}{\partial x^q} = 0, \tag{1}$$

($\varepsilon = \pm 1$ и m — целое число $\geqslant 0$) в некоторой области $D(|t| < R$, $a \leqslant x \leqslant b)$* при постановке следующей задачи Коши.

1) Какие необходимые и достаточные условия надо наложить на структурные свойства начальных данных

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x) \quad (k=0, \ 1, \ \ldots, \ p-1), \tag{2}$$

определенных на отрезке $[a, b]$, для того, чтобы уравнение (1) допускало аналитическое по (действительному или комплексному) переменному t решение в некоторой окрестности $t=0$?

2) Если такое решение существует, то какова будет его природа относительно переменного x?

Задача Коши в такой постановке, очевидно, может быть сформулирована для более общих уравнений с частными производными и является в некотором смысле обратной классической задаче Коши — Ковалевской.

В самом деле, если в задаче Коши — Ковалевской заранее предполагается аналитичность начальных данных в окрестности некоторой точки и доказывается существование также локально аналитического решения в некоторой области D, то в нашей постановке задачи требуется существование a priori аналитического решения по данному переменному t; тогда ищется класс допустимых функций для начальных данных и природа решения относительно других переменных.

2. При доказательстве основных теорем нами используются следующие леммы.

---

* Решение предполагается регулярным относительно переменного x в области D, т. е. допускающим непрерывную производную q-го порядка.

Лемма 1. *Для решения уравнения* (1), *аналитического по* t *и регулярного по* x *в области* D, *всегда имеет место равенство:*

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial^q z}{\partial x^q}\right)=\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left(\frac{\partial^n z}{\partial t^n}\right),$$

где n — *любое целое положительное число.*

Лемма 2. *Если производные бесконечное число раз дифференцируемой функции* $f(x)$ *на данном отрезке* $[a, b]$ *для любого фиксированного целого положительного* k *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{x\subset[a,\,b]}\left|f^{(nk)}(x)\right|\leqslant\frac{\tilde{M}\,(nk)!^{\alpha}}{\tilde{H}^{nk}}\qquad(\alpha>0,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

то для производных всех порядков справедливо неравенство

$$\max_{x\subset[a,\,b]}\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant\frac{M\,(n!)^{\alpha}}{H^{n}},$$

где M *и* H *и* $\tilde{M}$ *и* $\tilde{H}$ — *некоторые положительные числа, причем* H *может быть выбрано сколь угодно близким к* $\tilde{H}$.

3. Величину дроби $\delta=p/q$ назовем весом уравнения (1). Оказывается, это понятие имеет существенное значение для характеристики структурных свойств решений уравнения (1) в области сколь угодно гладких функций и естественно обобщается на более широкий класс линейных уравнений с частными производными.

Используя леммы 1 и 2 и понятие веса уравнения, докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *в окрестности* $t=0$ *допускало единственное аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного* t, *необходимо и достаточно, чтобы начальные данные* (2) *были бесконечно дифференцируемыми на* $[a, b]$ *и принадлежали к классу* α *в смысле Жеврея* (1) *не выше, чем вес уравнения* (1), *т. е.* $\alpha\leqslant\delta$.

При этом:

1) *если* $\alpha=\delta$, *то решение будет аналитическим по* t *для* $|t|<R$, *где* R — *некоторое фиксированное число* $\neq 0$;

2) *если* $\alpha<\delta$, *то решение будет целой функцией относительно* t.

Если положить $m=0$, $p=1$ и $q=2$ или $m=0$, $p=2$ и $q=1$, то сразу вытекают известные классические результаты С. Ковалевской (2), Ле Ру (3) и Хольмгрена (4), полученные ими для уравнения теплопроводности.

Теорема 2. *Любое решение уравнения* (1), *аналитическое по* t *в окрестности* $t=0$, *будет сколь угодно дифференцируемой функцией по* x *в области* D *и функцией класса* $\alpha\leqslant\delta$ *относительно* x *в некоторой замкнутой области* D' $(|t|\leqslant\tau<R,\ a\leqslant x\leqslant b)\subset D$.

4. Из теорем 1 и 2 легко вытекают следующие следствия:

Следствие 1. *Для уравнения* (1) *с весом* $\delta=p/q\leqslant 1$ *требование аналитичности его решения по переменному* t *влечет за собой аналитичность его решения также по переменному* x.

В частности, отсюда следует, например, что гиперболическое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ и эллиптическое уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ могут иметь аналитическое решение лишь одновременно по обоим переменным t и x, что, как известно, несправедливо для параболического уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Следствие 2. *Если для уравнения* (1) *начальные данные* (2) *являются функциями, аналитическими на отрезке* $[a, b]$, *то всякое решение его, аналитическое по (вещественному или комплексному) переменному* t *в некоторой окрестности* $t=0$ *будет целой функцией относительно* t, *когда* $\delta > 1$, *и аналитической функцией для* $|t| < R \neq 0$, *когда* $\delta = 1$.

Очевидно, это следствие является частным случаем теоремы Коши — Ковалевской для уравнения (1), но в нелокальной ее формулировке.

Следствие 3. *Любое уравнение* (1) *с весом* $\delta > 1$ *всегда допускает существование неаналитического решения по переменному* x.

Следствие 4. *Любое аналитическое решение в окрестности* $t=0$ *для уравнения* (1) *с весом* $\delta > 1$ *и с начальными данными* (2), *определенными в классе квазианалитических функций Данжуа* ([5]) *или же, вообще говоря, в классе квазианалитических функций, определенных условием*

$$\max_{x \subset [a, b]} \left|\varphi_k^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{M (n!)^{1+\varepsilon}}{H^n} \quad (\varepsilon > 0),$$

будет целой функцией относительно переменного t. *При этом решение* $z(t, x)$ *в некоторой замкнутой области* $D'(|t| \leqslant r < R, a \leqslant x \leqslant b) \subset D$ *будет функцией класса* $\alpha = 1 + \varepsilon$ *в смысле Жеврея* ([1]).

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии
Наук СССР

Поступило
1 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Jevrey, Ann. Ec. Norm., **35**, 3 (1918). [2] S. Kowalewsky, J. reine u. angew. Math., **80** (1875). [3] J. Le Roux, Bull. des sciences math., **19** (1895). [4] E. Holmgren, Ark. Math., Astr. och Fysik, 4, H. 1—2, 3—4 (1908). [5] Denjoy, C. R., **175**, 1329 (1921).