Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. И. НЕЙМАРК

СТРУКТУРА D-РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПОЛИНОМОВ И ДИАГРАММЫ ВЫШНЕГРАДСКОГО И НАЙКВИСТА

(Представлено академиком А. А. Андроновым 13 XII 1947)

1. Настоящая заметка посвящена исследованию структуры разбиения пространства коэффициентов комплексных полиномов n-й степени на множества полиномов, имеющих k корней слева и $n-k$ корней справа от мнимой оси.

Решение этой задачи, в частности исследование плоских сечений такого разбиения, позволило дать новую трактовку широко используемого в радиофизике и теории автоматического регулирования критерия Найквиста ([1]) и дать упрощенную методику построения хорошо известных в теории автоматического регулирования диаграмм Вышнеградского ([2])*. Прикладное значение излагаемой здесь трактовки диаграмм Найквиста, при которой — если стать на геометрическую точку зрения — критерий Найквиста сливается с критерием Эрмита — Гурвица, иллюстрируется примером § 5.

2. Пусть R_{2n} — проективное пространство полиномов n-й степени

$$P_n=(a_0+ib_0)z^n+(a_1+ib_1)z^{n-1}+\ldots+a_n+ib_n$$

и пусть $D(k,\ n-k)$ — множество полиномов, имеющих k корней слева и $n-k$ справа от мнимой оси. Назовем разбиение R_{2n} на множества $D(n,0),\ldots,D(0,n)$ D-разбиением R_{2n}**.

Имеет место:

А. Каждое из множеств $D(k,n-k)$ гомеоморфно $2n$-мерному евклидову пространству.

Б. Граница L_{2n-1} всех областей $D(n,0),\ldots,D(0,n)$ состоит из полиномов, допускающих чисто мнимый корень и, следовательно, обращающих в нуль последний определитель критерия Эрмита — Гурвица ***.

Остальные поверхности $\Delta_2=0,\ldots,\ \Delta_{2n-2}=0$ нигде не образуют границы областей D. Их роль состоит в отделении той или иной

* Позднее аналогичными диаграммами занимался Ф. Клейн ([3]).

** Задача о структуре D-разбиения пространства полиномов не сводится, но включает в себя, в качестве подзадачи, проблему установления необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты полинома n-й степени, чтобы он принадлежал к множеству $D(k,n-k)$. Новый вывод этих условий был недавно дан автором настоящей заметки ([8]). Эти условия при $k=n$ в случае пространства комплексных полиномов будем называть условиями Эрмита — Гурвица ([4-6]) и обозначать $\Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ldots,\Delta_{2n}>0$, а в случае пространства действительных полиномов — условиями Раута — Гурвица ([5,7]) и обозначать $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ldots,\ \Delta_n>0$.

*** Действительно, если $P_n(i\omega)=f_n(\omega)+ig_n(\omega)=0$, то результант действительных полиномов f_n и g_n, совпадающий с Δ_{2n}, равен нулю.

области D, для которой допустим $\Delta_{2n}>0$, от других, удовлетворяющих этому же условию. Поэтому через s-кратную линию самопересечения $\Delta_{2n}=0$ проходит еще $s-1$ поверхностей $\Delta_2=0$, именно $\Delta_{2n-2}=0, \ldots, \Delta_{2n-2s-4}=0$. Отметим, что L_{2n-1} совпадает с поверхностью $\Delta_{2n}=0$ с точностью до многообразия размерности $2n-2$, пересечение которого с L_{2n-1} размерности $2n-3$.

3. Особенности D-разбиения пространства действительных полиномов. Граница D-разбиения пространства действительных полиномов L_{2n-1} распадается на гиперплоскости $a_0=0$ и $a_n=0$, соответствующие наличию бесконечного и нулевого корней, и на часть поверхности $\Delta_{n-1}=0$, соответствующую наличию двух чисто мнимых корней. Существенно, что для этого случая действительных полиномов паразитное многообразие точек R_n, удовлетворяющих условию $\Delta_{n-1}=0$ и не принадлежащих к границе L_{n-1}, имеет ту же размерность $n-1$, что и L_{n-1}.

4. Структура плоских сечений пространства комплексных полиномов. Рассмотрим D-разбиение τ, ν-плоскости полиномов

$$\tau P(z)+\nu Q(z)+R(z), \tag{1}$$

которое можем считать полученным в результате сечения плоскостью (1) D-разбиения R_{2n}*.

Точки границы Γ D-разбиения τ, ν-плоскости (1) удовлетворяют условию $\tau P(i\omega)+\nu Q(i\omega)+R(i\omega)=0$ (ω действительно) или, разделяя действительную и мнимую части, условиям $\tau P_1(\omega)+\nu Q_1(\omega)+R_1(\omega)=0$ и $\tau P_2(\omega)+\nu Q_2(\omega)+R_2(\omega)=0$.

Отсюда следует, что Γ состоит из:

А. Уникурсальной алгебраической кривой N, параметрические уравнения которой

$$\tau=(Q_1R_2-Q_2R_1)(P_1Q_2-P_2Q_1)^{-1}=\Delta_\tau\Delta^{-1}, \quad \nu=(-P_1R_2+P_2R_1)\Delta^{-1}=\Delta_\nu\Delta^{-1}.$$

Б. Прямых $M\omega_j$, уравнения которых $\tau P(i\omega_j)+\nu Q(i\omega_j)+R(i\omega_j)=0$, где ω_j — общие действительные корни уравнений $\Delta_\tau\Delta_\nu=\Delta=0$.

Пусть граница Γ найдена. Каждая из областей, на которые она разбивает τ, ν-плоскость, состоит из полиномов, имеющих одни и те же числа корней слева и справа от мнимой оси.

Наша задача теперь состоит в установлении, к какому именно множеству D принадлежит каждая из этих областей **.

Будем штриховать один, два,... или ни одного раза ту из сторон Γ, чтобы при переходе через простую точку Γ с штрихованной стороны на нештрихованную с левой полуплоскости на правую переходил один, два,... или ни одного корня полинома (1).

Сформулируем легко устанавливаемое правило штриховки для грубого случая, когда есть кривая N и нет прямых $M\omega_i$: если направление прогибания N, соответствующее изменению ω от $-\infty$ до $+\infty$, примем за положительное, то при $\Delta>0$ следует штриховать левую, а при $\Delta<0$ — правую сторону кривой N ***.

---

* Если мы хотим изобразить совокупность полиномов (1) так, чтобы нашлось место и полиномам для бесконечных значений τ и ν, то следует прибегнуть к полусфере Пуанкаре и в частном случае, когда $P=(\alpha+i\beta)Q$ $(\beta\neq 0)$, к сфере. В последнем случае два действительных параметра могут быть заменены одним комплексным w и (1) представлено в виде $P+wQ$.

** Эта задача, конечно, непосредственно решается теми необходимыми и достаточными условиями, о которых шла речь в сноске к § 2.

*** Δ может менять знак только при переходе кривой N через бесконечность.

Итак, построение D-разбиения τ, ν-плоскости может быть выполнено, если: а) построить границу Γ; б) нанести штриховку; в) знать, к какой области или какого типа границе принадлежит какой-нибудь полином этой плоскости.

5. Диаграммы Найквиста. Будем называть так D-разбиение w-плоскости полиномов $P=wQ$, где P и Q — действительные полиномы. В этом случае граница Γ — кривая N, которую будем называть кривой Найквиста, а в частном случае, когда $Q=1$, кривой Михайлова ([9]), симметрична относительно действительной оси w-плоскости, параметрическое уравнение которой $w=-P(i\omega)\,Q^{-1}(i\omega)$.

Так как для этого случая $\Delta=Q_1^2+Q_2^2$, то штриховать следует всегда левую сторону N. Если $K(i\omega)=-P(i\omega)\,Q^{-1}(i\omega)$ — коэффициент усиления устойчивой разомкнутой направленной цепи и $\lim\limits_{\omega\to\infty}|K(i\omega)|<\infty$, то D-разбиение w-плоскости полиномов $P+wQ$ определяется обычной кривой Найквиста. Соответствующая замкнутая система устойчива или неустойчива в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит точка $w=1$ области $D(n, 0)$. Часть плоскости w, содержащая точку $w=\infty$, поскольку ей соответствует полином Q, принадлежащий $D(n, 0)$, принадлежит $D(n, 0)$. Таким образом, кривая Найквиста по сути дела позволяет установить не только устойчива или неустойчива данная система, но и указать область устойчивости по параметру w*.

Пример. Рассмотрим зависимость устойчивости системы, составленной из релаксационных звеньев ([10, 11]), с характеристическим полиномом $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+T_k z)+\mu=P+\mu$ от коэффициента усиления μ. Для этого вводим в рассмотрение комплексные значения μ, положив $\mu=w$, и строим D-разбиение для плоскости полиномов $P+w$. Кривая N характерна тем, что: а) $\arg w(i\omega)$ монотонно возрастает вместе с ω и полное его изменение равно $n\pi$, б) $|w|$ возрастает вместе с $|\omega|$.

Отсюда непосредственно следует, что область устойчивости для действительных значений μ состоит из одного отрезка $(-1, \bar\mu)$, лежащего в $D(n, 0)$, и $\bar\mu$ определяется из уравнений $\arg P(i\omega)=\pi$, $\bar\mu=|P(i\omega)|$**.

Рассмотрим теперь $\bar\mu$ как функцию постоянных времени $T_1\geqslant T_2\geqslant\ldots\geqslant T_n$. Имеет место оценка $A=|P(i\omega_2)|\leqslant\bar\mu\leqslant|P(i\omega_1)|=B$, где $\omega_j^2=(T_1+T_2+T_3+\bar T_j)(T_1T_2T_3+\bar T_1T_2T_j+T_1T_3\bar T_j+T_2T_3\bar T_j)^{-1}$ $(j=1{,}2)$ и $\bar T_1=T_4+\ldots+T_n$, $T_2=\omega_1^{-1}\,\mathrm{tg}\,\bar T_1\omega_1$. При обычных значениях постоянных времени, наверняка при $\bar T_1\omega_1<1/4$, приходим с хорошей точностью к тому, что критический коэффициент усиления определяется первыми тремя постоянными времени и суммой остальных, именно $\bar\mu\approx C=(1+T_1^2\omega_1^2)^{1/2}(1+T_2^2\omega_1^2)^{1/2}(1+T_3^2\omega_1^2)^{1/2}$, где ω_1 зависит от T_1, T_2, T_3 и $\bar T_1$.

Заметим, что, как бы ни были малы $T_4,\ldots$ по сравнению с T_3, если их сумма достаточно велика, их влиянием на $\bar\mu$ пренебречь нельзя, поскольку $\bar\mu\to 1$ при $\bar T_1\to\infty$. Если, например, первые три постоянные

---

* Заметим, что некоторые трудности применения критерия Найквиста в случае, когда Q допускает нулевой или чисто мнимые корни, при этой трактовке сами собой отпадают. В случае нулевого корня, например, область устойчивости содержит часть w-плоскости, примыкающую к точке $w=\infty$ со стороны штриховки.

** $\bar\mu$ — наименьший положительный корень предпоследнего определителя критерия Раута — Гурвица.

времени равны 2; 0,5; 0,02 и есть еще $n-3$, равных 0,01, то вычисления дают:

$n-3$	A	B	C	$n-3$	A	B	C
0	131,3	131,3	131,3	3	52,5	52,07	52,1
1	86,8	86,75	86,5	10	23,4	22,1	23,2

где C — результат вычисления $\overline{\mu}$ по первым трем и сумме постоянных времени.

6. Диаграммы Вышнеградского. Так будем называть D-разбиение τ, ν-плоскости полиномов $\tau P+\nu Q+R$, где P, Q, R — действительные полиномы. В этом случае Γ, вообще, состоит из сдвоенной кривой N, соответствующей наличию пары чисто мнимых сопряженных корней, и двух прямых, соответствующих наличию нулевого и, соответственно, бесконечного корней.

Таким образом, построение диаграмм Вышнеградского не требует использования условий $\Delta_1>0, \ldots, \Delta_{n-2}>0$. Граница Γ, точки которой удовлетворяют условию $a_0 a_n \Delta_{n-1}=0$, состоит в грубом случае из двух прямых: M_∞ с уравнением $a_0=0$ и M_0 с уравнением $a_n=0$ и кривой N, являющейся частью кривой $\Delta_{n-1}=0$. Уравнение кривой N в параметрической форме написано в § 2, где теперь P, Q и R — действительные полиномы.

В этом случае кривая N при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ пробегается дважды в разных направлениях и согласно правилу § 4 окажется заштрихованной дважды с одной стороны.

Стороны прямых M_0 и M_∞ однократно штрихуются следующим образом. Пусть значению $\omega=0$ на кривой N соответствует точка A_0, через которую проходит прямая M_0. Штриховку сторон всей прямой M_0 следует провести таким образом, чтобы в окрестности точки A_0 штрихованные стороны кривой N и прямой M_0 были обращены друг к другу. Совершенно аналогично штрихуются стороны прямой M_∞.

Горьковский государственный университет

Поступило 8 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Nyquist, Bell Techn. J., 11, 126 (1932). [2] И. Вышнеградский, Изв. СПб. технологическ. ин-та, 1, 21 (1877). [3] F. Klein, Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen, München, 1892. [4] C. Hermite, Oeuvres, I, Paris, 1905, p. 397. [5] A. Hurwitz, Math. Ann., 46, 275 (1895). [6] E. Frank, Bull. Am. Math. Soc., 52, 144 (1946). [7] E. Routh, A Treatise on the Stability of Given State of Motion, London, 1877. [8] Ю. Неймарк, ДАН, 58, 358 (1947). [9] А. Михайлов, ЖТФ, 9, 19 (1939). [10] D. Prinz, J. Sci. Instrum., 21, 53 (1944). [11] Д. Марьяновский, Электричество, 9, 15 (1945).