Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. МЕНЬШОВ

О СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 2 XII 1947)

Если $f(x)$ есть измеримая функция, конечная почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, то существует тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1}$$

который сходится к $f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [1].

Остается нерешенным вопрос, будет ли справедливо это утверждение, если отказаться от требования конечности $f(x)$ почти всюду. В частности неизвестно, существует ли тригонометрический ряд, который сходится к $+\infty$ почти всюду *. Однако на поставленный вопрос можно дать ответ, если вместо обычной сходимости рассматривать сходимость по мере.

Введем следующие определения и обозначения.

Будем говорить, что функция определена всюду на некотором множестве E, если она имеет определенное значение, конечное или равное $+\infty$ или $-\infty$, в каждой точке этого множества.

Через $\{f_n(x)\}$ будем обозначать последовательность функций $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$, измеримых и конечных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$.

Мы скажем, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на сегменте $[a, b]$ к измеримой функции $f(x)$, определенной почти всюду на этом сегменте ($f(x)$ не обязательно должна быть конечна почти всюду на $[a, b]$), если функции $f_n(x)$ можно представить в виде

$$f_n(x) = g_n(x) + \alpha_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $g_n(x)$ и $\alpha_n(x)$ конечны почти всюду на $[a, b]$,

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x)$$

почти всюду на этом сегменте и $\alpha_n(x)$ сходится по мере к нулю на $[a, b]$, когда $n \to \infty$ **.

Можно доказать следующую теорему.

* Этот вопрос был поставлен акад. Н. Н. Лузиным.

** Это определение совпадает с обычным определением сходимости по мере, если $f(x)$ конечна почти всюду на $[a, b]$.

Теорема 1. *Для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной почти всюду на* $[-\pi, \pi]$, *существует тригонометрический ряд* (1), *который сходится по мере к* $f(x)$ *на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяет условию*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = 0. \tag{2}$$

Это утверждение является частным случаем более общих теорем, для формулировки которых нам потребуются следующие определения.

Мы скажем, что функция $F(x)$, определенная почти всюду на сегменте $[a, b]$, есть **верхний предел по мере** на $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $F(x)$ измерима и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{mes} E[f_n(x) > \varphi(x)] = 0$ *

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что почти всюду на этом сегменте $\varphi(x) = F(x)$, если $F(x) = +\infty$, и $\varphi(x) > F(x)$, если $F(x) < +\infty$;

2) $\limsup\limits_{n \to \infty} \{\operatorname{mes} E[f_n(x) > \psi(x)] \cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Функцию $G(x)$, определенную почти всюду на $[a, b]$, мы будем называть **нижним пределом по мере** на $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$, если $-G(x)$ есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности $\{-f_n(x)\}$.

Для верхних и нижних пределов по мере на $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ можно доказать следующие утверждения:

A. Любая последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет хотя бы один верхний предел и хотя бы один нижний предел по мере на $[a, b]$.

B. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются верхними пределами по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x),\}$ то $F_1(x) = F_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

C. Если $G_1(x)$ и $G_2(x)$ являются нижними пределами по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $G_1(x) = G_2(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

D. Если $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ для одной и той же последовательности $\{f_n(x)\}$, то $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

E. Если верхний и нижний пределы по мере на $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ равны функции $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$ на данном сегменте.

Будем называть функции $F(x)$ и $G(x)$ верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, если они являются такими пределами для частных сумм этого ряда.

Можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *Для любых двух измеримых функций* $F(x)$ *и* $G(x)$, *определенных почти всюду на сегменте* $[-\pi, \pi]$ *и таких, что* $G(x) \leqslant F(x)$ *почти всюду на этом сегменте, существует тригонометрический ряд* (1), *обладающий следующими свойствами*:

---

* Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

1°. $F(x)$ и $G(x)$ *являются верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1).

2°. *Какова бы ни была измеримая функция* $\psi(x)$, *определенная почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющая условию* $G(x) \leqslant \psi(x) \leqslant F(x)$ *почти всюду на этом сегменте, можно определить последовательность частных ряда* (1), *сходящуюся к* $\psi(x)$ *почти всюду на* $[-\pi, \pi]$.

3°. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0.$

Ясно, что теорема 1 является непосредственным следствием теоремы 2.

Теорема 3. *Для любых измеримых функций* $F(x)$, $G(x)$ *и* $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, *определенных почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющих неравенствам*

$$G(x) \leqslant \psi_i(x) \leqslant F(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

почти всюду на этом сегменте, можно определить тригонометрический ряд (1), *который обладает следующими свойствами*:

1°. $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1).

2°. *Для любого* $i = 1, 2, \ldots, p$ *существует последовательность частных сумм ряда* (1), *которая сходится к* $\psi_i(x)$ *почти всюду на* $[-\pi, \pi]$.

3°. *Если какая-нибудь последовательность частных сумм ряда* (1) *сходится на множестве* E *положительной меры к функции* $\psi(x)$, $E \subset [-\pi, \pi]$, *то для одного из значений* $i = 1, 2, \ldots, p$ $\psi(x) = \psi_i(x)$ *почти всюду на* E.

4°. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0, \qquad \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0.$

В заключение формулируем основную лемму, при помощи которой доказываются теоремы 2 и 3.

Лемма. *Для любого целого числа* $m \geqslant 0$, *любого положительного числа* $\varepsilon < 1$ *и любого сегмента* $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ *можно определить тригонометрический многочлен*

$$\sum_{j=m+1}^{\mu} (c_j \cos jx + d_j \sin jx)$$

и измеримое множество e, *которые обладают следующими свойствами*:

1) $$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (c_j \cos jx + d_j \sin jx)\right| < \varepsilon$$
$$(x \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] - [a', b'], \quad m < n \leqslant \mu),$$

где $a' = a - (b - a)\,\omega(\varepsilon)$, $b' = b + (b - a)\,\omega(\varepsilon)$ *и* $\omega(\varepsilon)$ *есть положительное число, зависящее только от* ε;

2) $\operatorname{mes} e \leqslant 2\varepsilon(b - a), \quad e \subset [-\pi, \pi]$;

3) $$\left|1 - \sum_{j=m+1}^{\mu} (c_j \cos jx + d_j \sin jx)\right| < \varepsilon(b - a)$$
$$(x \in [a, b] - e);$$

4) $$\left|\sum_{j=m+1}^{\mu}(c_j\cos jx+d_j\sin jx)\right|<\varepsilon(b-a)$$
$$(x\in[-\pi,\ \pi]-(a,\ b)-e\ ^{*};$$

5) $$|c_j|<b-a,\qquad |d_j|<b-a\qquad (m<j\leqslant\mu).$$

Поступило
2 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Меньшов, Математ. сб., **9** (51) : 3, 667 (1941).

---

* Через $(a,\ b)$ мы обозначаем открытый интервал.