Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

А. А. ЛЯПУНОВ

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 5 XII 1947)

Мною были определены T-операции над множествами и показано что эти операции тесно связаны с вопросом о построении множеств измеримость которых обусловлена их дескриптивной природой. В частности, теоремы об измеримости A-множеств [1], C-множеств [2] и R-множеств [3,4] можно рассматривать как следствия общей теоремы о связи T-операций с дескриптивной измеримостью.

Однако связь между T-операциями и этими классами множеств простирается глубже. Все эти классы могут быть определены при помощи T-операций.

T-операции с постоянной базой являются очень частным случаем T-операций. Они определяются так.

Пусть дана последовательность множеств цепей натуральных чисел $\{N_n\}=\mathfrak{N}$ и последовательность произвольных множеств $\{E_n\}$. Положим для всякого n $E_n^0=E_n$, $E_n^{\alpha+1}=E_n^{\alpha}\cdot\Phi_{N_n}(E_m^{\alpha})$, и если γ — число второго рода, то $E_n^{\gamma}=\prod\limits_{\beta<\gamma}E_n^{\beta}$. Тогда $T_{\mathfrak{N}}(\{E_n\})=\prod\limits_{\alpha<\Omega}E_1^{\alpha}$.

Ясно, что всякая T-операция с постоянной базой является правильной. Всякая T-операция, очевидно, является δs-операцией. Однако T-операции с постоянной базой могут быть представлены в виде R-операции. В самом деле, положим

$$\mathcal{E}=E_1,\quad \mathcal{E}_{n_1\ldots n_k}=E_{n_k},\quad M=N_1,\quad M_{n_1\ldots n_k}=N_{n_k}.$$

Тогда

$$R_{\mathfrak{M}}=(\{\mathcal{E}_{m_1\ldots m_i}\})=T_{\mathfrak{N}}(\{E_n\}),\tag{*}$$

где $\mathfrak{M}=\{M_{m_1\ldots m_i}\}$.

Отметим, что $R_{\mathfrak{M}}\operatorname{Ind}(x/\{\mathcal{E}_{m_1\ldots m_i}\})=T_{\mathfrak{N}}\operatorname{Ind}(x/\{E_n\})$.

T-операцию с постоянной базой назовем операцией типа $T(B)$, если все множества N_n суть B-множества; типа $T(\overline{B})$, если класс B-множеств инвариантен относительно всех операций Φ_{N_n}; типа $T(A)$, если все множества N_n суть A-множества, и типа $T(\overline{A})$, если класс A-множеств инвариантен относительно всех операций Φ_{N_n}.

Теорема 1. *Класс A-множеств можно определить как класс всех множеств, получаемых из интервалов с помощью всевозможных операций типа $T(B)$ или $T(\overline{B})$.*

Теорема 2. *Класс A-множеств инвариантен относительно всех операций типа $T(A)$ и $T(\overline{A})$.*

Теорема 3. *Класс C-множеств есть наименьший класс множеств, содержащий все интервалы и инвариантный относительно операции взятия дополнения и всех операций одного из типов $T(B)$, $T(\overline{B})$, $T(A)$ или $T(\overline{A})$.*

Доказательство всех трех теорем сводится к тому, что операции всех четырех типов $T(B)$, $T(\overline{B})$, $T(A)$ или $T(\overline{A})$ могут быть сведены с помощью отмеченного выше равенства к A-операции. В то же время A-операция может быть представлена как операция любого из рассматриваемых типов.

Систему δs-операций мы назовем T-замкнутой, если вместе с δs-операцией Φ_N она содержит и дополнительную Φ_{N^c}, а кроме того, если она содержит все T-операции с постоянными базами $\mathfrak{N}=\{N_n\}$ такие, что все δs-операции Φ_{N_n} входят в эту систему.

Ясно, что существует наименьшая T-замкнутая система δs-операций, содержащая произвольную фиксированную операцию. Те δs-операции, которые входят в наименьшую T-замкнутую систему операций, содержащую операцию счетное пересечение, мы назовем операциями типа $T_{\min}$.

Теорема 4. *Класс R-множеств является наименьшим из всех классов множеств, содержащих все интервалы и инвариантных относительно всех операций типа $T_{\min}$.*

Доказательство этой теоремы основано, с одной стороны, на равенстве (*), с другой стороны, на том, что операция R тождественна операции R^*, которая является частным случаем T-операции с постоянной базой ([4]).

Отметим, что настоящая теорема доставляет определение R-множеств без помощи R-операций.

Поступило
5 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930. [2] Е. А. Селивановский, Мат. сб., **35**, 379 (1928). [3] L. Kantorowich and E. Livenson, Fund. Math., **20**, 54 (1933). [4] А. Ляпунов, ДАН, **58**, № 9 (1947).