Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. ГУЛЬ

ОСОБЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ КОЛЛИНЕАРНЫХ СВЯЗОК ВЫСШИХ СТУПЕНЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1947)

Аналогично тому, как конические сечения могут быть построены с помощью коллинеарного соответствия между двумя пучками прямых, заданием коллинеарного и коррелятивного соответствий между связками линейных пространств могут быть построены и изучены различные кривые и поверхности. Поверхности второго порядка образуются пересечением соответственных прямых и плоскостей двух коллинеарных или коррелятивных связок. Поверхность третьего порядка H. Grassmann [1] построил, задав коллинеарное соответствие между тремя связками плоскостей. G. Veronese [2] обобщил это построение для n-мерного пространства, а C. Segre [3] дал общую формулу для подсчета порядков получающихся поверхностей в зависимости от связок, с помощью которых ведется построение.

Конструкция H. Grassmann'а поверхности третьего порядка позволяет полностью изучить принадлежащую этой поверхности известную конфигурацию из 27 прямых. Часть из этих прямых являются прямыми H. Schröter'а [4], который нашел в трех коллинеарных связках плоскостей такие тройки соответственных плоскостей, что каждая из этих троек пересекается не в точке, а по прямой. В настоящей работе нами исследован вопрос о том, в каких случаях n соответственных гиперплоскостей коллинеарных связок высших ступеней в n-мерном пространстве (образующих гиперповерхность G. Veronese n-го порядка) будут пересекаться не в точке, а по прямой, плоскости и вообще по какому-то k-мерному линейному пространству. Эти k-мерные плоскости будут принадлежать соответствующей гиперповерхности G. Veronese и будут в то же время характерными для коллинеарных соответствий связок. В дальнейшем мы будем их называть особыми элементами коллинеарных связок.

Рассмотрим n-мерное комплексное проективное пространство, т. е. пространство, в котором точка определяется $n+1$ однородными комплексными координатами x_i ($i=0, 1, \ldots, n$), не обращающимися одновременно в нуль.

Связкой высшей ступени в таком пространстве мы будем называть множество гиперплоскостей, проходящих через одну точку. Если выбрать в такой связке n линейно независимых базисных гиперплоскостей U_j

$$U_j \equiv A_j^i\, x_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

то уравнение связки можно написать в виде

$$a^j U_j = 0; \tag{2}$$

значения параметров связки a^j, коэффициентов A^i_j, равно как и координат x_i берутся в теле комплексных чисел.

Уравнения n таких коллинеарных между собой связок можно написать в виде:

$$a^j U^k_j = 0, \qquad k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{3}$$

Каждой системе значений параметров a^j будут соответствовать в связках n коллинеарных между собой гиперплоскостей. Эти n гиперплоскостей будут пересекаться в n-мерном пространстве, вообще говоря, в точке. Для того чтобы n таких коллинеарных между собой гиперплоскостей пересекались по прямой, должны существовать такие числа b_k и такая система значений параметров a^j, чтобы выполнялось тождество (по x_i):

$$b_k a^j U_j{}^k \equiv 0, \qquad j,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n. \tag{4}$$

Заменяя в (4) U^k_j их выражениями через x_i из (1) и приравнивая нулю коэффициенты при координатах, получим $n+1$ соотношений для $2n$ однородных неизвестных a^j и b_k (или для $2n-2$ отношений a_j/a_1 и b_k/b_1):

$$A^{i,\,k}_j b_k a^j = 0, \qquad j,\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n, \quad i = 0,\ 1, \ldots,\ n. \tag{5}$$

При $n = 3$ число уравнений соответствует числу неизвестных. Следовательно, в трех коллинеарных связках плоскостей в трехмерном пространстве существует конечное, вообще говоря, число таких групп соответственных плоскостей, которые пересекаются по прямым. При $n = 4$ такого рода прямых — особых элементов коллинеарных связок — будет уже, вообще говоря, семейство — множество, зависящее от одного параметра, при $n = 5$ — конгруенция и т. д.

Для того чтобы особым элементом коллинеарных связок высших ступеней была плоскость (двумерная), должна существовать, как нетрудно видеть, такая система значений параметров a^j и чисел b_k и c_k, чтобы выполнялись тождества:

$$\begin{aligned} b_1 a^j U^1_j + b_2\, a^j U^3_j + \ldots + b_{n-1} a^j U^n_j &\equiv 0, \\ c_1 a^j U^2_j + c_2 a^j U^3_j + \ldots + c_{n-1} a^j U^n_j &\equiv 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что двумерные плоскости будут являться особыми элементами коллинеарных связок при $n > 6$.

Если обозначить через k размерность пространства, которое предполагается в качестве особого элемента коллинеарных связок, то число условий будет $k(n+1)$, число однородных неизвестных $n + k(n - k + 1)$. Отсюда размерность пространства, в котором n связок высших ступеней уже имеют особые элементы размерности k, определяется по формуле:

$$n = k^2 + k + 1. \tag{7}$$

Поступило
18 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Grassmann, J. reine u. angew. Math., 49, 62 (1855). [2] G. Veronese, Math. Ann., 19 : 2, 161 (1881). [3] C. Segre, Rend. Acc. Lincei, 9 (5): 8, 253 (1900). [4] H. Schröter, J. reine u. angew. Math., 62, 270 (1863).