Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. С. ГРАДШТЕЙН

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1947)

В последнее время появился ряд работ, исследующих вопрос о том, при каких условиях в дифференциальных уравнениях можно пренебречь членами, содержащими малый параметр в качестве множителя, в том случае, когда в эти члены входят производные высшего порядка. В частности, этот вопрос для линейного уравнения с переменными коэффициентами и одним малым множителем при производной высшего порядка был исследован Tschen'ом (5). Тот же вопрос для системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами и целой системой малых множителей, зависящих от одного параметра, был исследован автором (1, 2).

Данная работа обобщает предыдущие работы автора и работу Tschen'a. В ней рассматривается линейное уравнение с переменными коэффициентами и малыми множителями при ряде высших производных. Опираясь на обобщение одной теоремы Birkhoff'a (3), аналогичное обобщению этой теоремы, данному Noaillon'ом (4), автор пришел к следующим выводам.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение $(m+\mu)$-го порядка

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t,\eta)\frac{d^k X}{dt^k}+\sum_{k=1}^{\mu}\eta^k \alpha_{m+k}(t,\eta)\frac{d^{m+k}X}{dt^{m+k}}=\alpha_{-1}(t,\eta). \qquad (1)$$

Коэффициенты $\alpha_k(t,\eta)$ и правая часть $\alpha_{-1}(t,\eta)$ в этом уравнении пусть являются комплексными функциями действительных переменных t и η, ограниченными в области $t_0\leqslant t\leqslant T$, $0\leqslant\eta\leqslant\varepsilon$ и аналитическими относительно η $(0\leqslant\eta\leqslant\varepsilon)$; иными словами,

$$|\alpha_k(t,\eta)|\leqslant M\left\{\begin{matrix} t_0\leqslant t\leqslant T,\ 0\leqslant\eta\leqslant\varepsilon \\ k=-1,\ 0,\ 1,\ldots,\ m+\mu\end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

и

$$\alpha_k(t,\eta)=\sum_{s=0}^{\infty}\eta^s\alpha_{ks}(t) \qquad (k=-1,\ 0,\ 1,\ldots,\ m+\mu). \qquad (3)$$

Далее предполагается, что коэффициенты $\alpha_{ks}(t)$ этих разложений имеют на отрезке $[t_0,\ T]$ производные любого порядка. Предположим, кроме того, что

$$\inf|\alpha_{m_0}(t)|>0, \qquad \inf|\alpha_{m+\mu}(t)|>0. \qquad (4)$$

Относительно μ корней уравнения

$$\sum_{k=0}^{\mu} \alpha_{m+k,\,0}(t)\, w^k = 0 \tag{5}$$

мы сделаем следующие предположения:

а) При любом значении $t_0 \leqslant t \leqslant T$ среди корней $w_i(t)$ этого уравнения нет кратных.

б)

$$\operatorname{Sup}(\operatorname{Re} w_i(t)) < 0 \qquad (i=1,\ 2, \ldots, \mu). \tag{6}$$

в) Для некоторой точки t отрезка $[t_0, T]$ введем нумерацию корней $w_i(t)$ так, чтобы имели место неравенства

$$\operatorname{Re} w_1(t) \leqslant \operatorname{Re} w_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} w_\mu(t) < 0. \tag{7}$$

Эта нумерация корней $w_i(t)$ уравнения (5) на отрезке $[t_0, T]$ может меняться только конечное число раз.

При указанных условиях и обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема. *Для того чтобы решение $X(t, \eta)$ уравнения* (1), *для которого рост начальных значений его и его производных подчинен ограничению*

$$X^{(l)}(t_0, \eta) = O(\eta^{-l}) \qquad (l = 0,\ 1, \ldots, m+\mu-1), \tag{8}$$

при $\eta \to +0$ в промежутке $t_0 < t \leqslant T$ стремилось к решению $x(t)$ уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_{k0}(t) \frac{d^k x}{dt^k} = \alpha_{-1,0}(t), \tag{9}$$

и для того, чтобы то же имело место для производных порядка $1, 2, \ldots, m-1$ решений этих уравнений, т. е. для того, чтобы в промежутке $t_0 < t \leqslant T$

$$\lim_{\eta \to +0} \frac{d^l X}{dt^l} = \frac{d^l x}{dt^l} \qquad (l = 0,\ 1, \ldots,\ m-1), \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы начальные значения искомых функций и их производных в уравнениях (1) *и* (8) *были связаны соотношениями*

$$\lim_{\eta \to +0} \left\{ \sum_{k=0}^{m-r} \alpha_k(t_0, \eta; r) X^{(k)}(t_0, \eta) + \sum_{k=1}^{\mu} \eta^k \alpha_{m+k-r}(t_0, \eta; r) X^{(m+k-r)}(t_0, \eta) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{m-r} \alpha_{k0}(t_0; r)\, x^{(k)}(t_0) \right\} = 0 \quad (r = 1,\ 2, \ldots,\ m), \tag{11}$$

где $\alpha_k(t_0, \eta; s)$ и $\alpha_k(t_0; s)$ определяются из формул $(s = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\alpha_k(t,\ \eta;\ s) = \tag{12a}$$
$$= \sum_{r=k+s}^{m+\mu} (-1)^{r-k-s} \eta^{r-k-s} \frac{(r-k-s+1)(r-k-s+2)\ldots(r-k-1)}{(s-1)!} \alpha_k^{(r-k-s)}(t, \eta)$$
$$(k = m-s+1,\ m-s+2, \ldots,\ \mu+m-s),$$

$$\alpha_k(t,\ \eta;\ s) = \tag{12b}$$
$$= \sum_{r=k+s}^{m} (-1)^{r-k-s} \frac{(r-k-s+1)(r-k-s+2)\dots(r-k-1)}{(s-1)!} \alpha_k^{(r-k-s)}(t,\eta) +$$
$$+ (-1)^{m-k-s} \times$$
$$\times \sum_{r=1}^{\mu} (-1)^r \eta^r \frac{(m+r-k-s+1)(m+r-k-s+2)\dots(m+r-k-1)}{(s-1)!} \alpha_{m+r}^{(m+r-k-s)}(t,\eta)$$
$$(k = 1,\ 2, \dots,\ m-s);$$

$$\alpha_{k0}(t;\ s) = \lim_{\eta\to+0} \alpha_{k0}(t,\ \eta;\ s) \quad (k = 1,\ 2, \dots,\ m-s). \tag{13}$$

Эта теорема доказана мною для уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами другим методом — методом операционного исчисления, причем для уравнений с постоянными коэффициентами ограничения, налагаемые на эти коэффициенты и правую часть уравнения (1), удалось значительно ослабить; именно: оказалось достаточным потребовать

а) существование пределов

$$\lim_{\eta\to+0} \alpha_k(\eta) = \alpha_k \quad (k = -1,\ 0,\ 1, \dots,\ m+\mu);$$

при этом $\alpha_m \neq 0$ и $\alpha_{m+\mu} \neq 0$, а уравнение (9) переходит в следующее:

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{d^k x}{dt^k} = \alpha_{-1}; \tag{9'}$$

б) отрицательности действительных частей всех корней уравнения

$$\sum_{k=0}^{\mu} \alpha_{m+k} w^k = 0 \tag{5'}$$

(никаких требований на кратность этих корней здесь не налагается).

Равенства (11) для уравнений с постоянными коэффициентами переходят в следующие:

$$\lim_{\eta\to+0} \left\{ \sum_{l=1}^{m-k} \alpha_{l+k}(\eta) X^{(l-1)}(t_0,\eta) + \sum_{l=1}^{\mu} \eta^l \alpha_{m+l}(\eta) X^{(m-k+l-1)}(t_0,\eta) - \right.$$
$$\left. - \sum_{l=1}^{m-k} \alpha_{l+k} x^{(l-1)}(t_0) \right\} = 0 \quad (k = 0,\ 1, \dots,\ m-1). \tag{11'}$$

Поступило
18 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Градштейн, ДАН, 53, № 5 (1946). [2] И. С. Градштейн, Изв. АН СССР, ОТН, № 5 (1947). [3] G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 219 (1908). [4] P. Noaillon, Mém. Soc. Sc. Liège, 9 (1912). [5] Yü-Why Tschen, Compositio Mathematica, 2, 378 (1935).