Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

М. С. БРОДСКИЙ и Д. П. МИЛЬМАН

О ЦЕНТРЕ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 XI 1947)

В настоящей статье E обозначает пространство типа (B), E^* — его сопряженное, K — выпуклое ограниченное множество в E или в E^*. При некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на K (в частности, когда K является компактом), доказывается, что совокупность всех изометрических отображений K на себя имеет в K общий фикспункт („центр выпуклого множества K“).

Определение 1. Пусть d обозначает диаметр множества K. Точку $x_0 \in K$ назовем диаметральной точкой K, если $\sup\limits_{x \in K} \| x_0 - x \| = d$. Мы будем говорить, что K имеет нормальную структуру, если не все его точки являются диаметральными и если этим же свойством обладает каждое выпуклое подмножество множества K, содержащее более одной точки.

Определение 2. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность элементов E, d — диаметр этой последовательности, d_n — расстояние элемента x_{n+1} от выпуклой оболочки K_n всех предшествующих элементов. Мы будем называть последовательность $\{x_n\}$ диаметральной, если $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = d$.

Пример диаметральной последовательности. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $(e)^*$, в которой все координаты элемента x_p кроме p-й равны нулю, а p-я координата равна единице ($p = 1, 2, 3, \ldots$). Легко видеть, что диаметр этой последовательности равен 2, а также $d_n = 2$ при любом n.

Теорема 1. *Для того чтобы K имело нормальную структуру, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало ни одной диаметральной последовательности.*

Необходимость. Допустим, что K содержит диаметральную последовательность $\{x_n\}$ и K_0 есть выпуклая оболочка этой последовательности. Достаточно показать, что множество K_0 не имеет нормальной структуры. Очевидно, что диаметр K_0 совпадает с диаметром d последовательности $\{x_n\}$. Если $x_0 \in K_0$, то $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ и $x_0 \in K_{m-1}$ при $m > n$. Следовательно, $d \geqslant \| x_0 - x_m \| > \inf\limits_{x \in K_{m-1}} \| x - x_m \| = d_{m-1}$. Этим доказано, что $\lim\limits_{m \to \infty} \| x_0 - x_m \| = d$.

Достаточность. Допустим, что в K содержится выпуклое множество P, не состоящее из одной точки и состоящее лишь из диа-

* Согласно обозначению S. Banach'a (1).

метральных точек. Пусть d — диаметр P. Достаточно показать, что в P содержится диаметральная последовательность. Пусть $d > \varepsilon > 0$ и точки $x_1, x_2 \in P$ выбраны так, что $\| x_1 - x_2 \| > d - \varepsilon$. Полагая, что точки $\{x_j\}_{j \leqslant n}$ уже построены, выберем $x_{n+1} \in P$ так, чтобы $\| y_{n-1} - x_{n+1} \| > d - \frac{\varepsilon}{n^2}$, где $y_{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Покажем, что построенная таким образом последовательность $\{x_j\}$ является диаметральной.

Пусть $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, $\alpha_p = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Легко непосредственно проверить справедливость формул:

$$y_{n-1} = \frac{1}{n\alpha_p} x + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha_p} \right) x_j,$$

$$\frac{1}{n\alpha_p} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha_p} \right) = 1, \qquad \frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha_p} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$d - \frac{\varepsilon}{n^2} < \| y_{n-1} - x_{n+1} \| \leqslant \frac{1}{n\alpha_p} \| x - x_{n+1} \| +$$
$$+ \sum_{j \neq p} \left(\frac{1}{n} - \frac{\alpha_j}{n\alpha_p} \right) \| x_j - x_{n+1} \| \leqslant \frac{1}{n\alpha_p} \| x - x_{n+1} \| + \left(1 - \frac{1}{n\alpha_p} \right) d,$$

и поэтому

$$\| x - x_{n+1} \| > \left(\frac{d}{n\alpha_p} - \frac{\varepsilon}{n^2} \right) n\alpha_p = d - \frac{\varepsilon\alpha_p}{n} \geqslant d - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Таким образом, $d_n > d - \varepsilon/n$ и, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = d$.

В дальнейшем нам понадобится еще следующее замечание. Если при построении диаметральной последовательности число ε выбрано достаточно малым, то точка x_{n+1} не будет принадлежать наименьшему линейному многообразию, содержащему точки $\{x_i\}_{j \leqslant n}$. Точки $\{x_j\}_{j \leqslant n}$ являются поэтому при любом n вершинами симплекса.

Определение 3. Пусть число ρ обладает тем свойством, что в единичной сфере S пространства E существует конечномерный симплекс любой размерности, длины сторон которого как угодно мало отличаются от ρ, а все его точки (как граничные, так и внутренние) как угодно близки к границе сферы S. Обозначим через ρ_0 supremum всех чисел ρ, обладающих указанным свойством, и будем сферу S называть ρ_0-граненой.

Теорема 2. *Если единичная сфера S пространства E ρ_0-гранена и $\rho_0 < 1$, то всякое выпуклое ограниченное множество в этом пространстве имеет нормальную структуру.*

Доказательство. Допустим, что выпуклое ограниченное множество $P \subset E$ не имеет нормальной структуры. По теореме 1 в P должна содержаться диаметральная последовательность $\{x_n\}$. Пусть d — диаметр этой последовательности. Рассматривая сферу радиуса d с центром в точке x_p построенной последовательности и перебирая все точки x_p $(p = 1, 2, \ldots)$, мы убедимся в том, что сфера S по крайней мере 1-гранена.

Конструкция центра выпуклого множества. Пусть в

E^* задано ограниченное, выпуклое, трансфинитно-замкнутое множество K нормальной структуры. Обозначим через K_ε совокупность точек $f \in K$, для которых $\sup\limits_{\varphi \in K} \|f - \varphi\| \leqslant d - \varepsilon$. Так как K имеет нормальную структуру, то множество K_ε при достаточно малом $\varepsilon > 0$ является непустым. Выпуклость множества K_ε очевидна. Докажем, что K_ε трансфинитно-замкнуто.

Пусть f_0 — трансфинитный предел ([1]) трансфинитной последовательности $\{f_\vartheta\} \subset K_\varepsilon$. Тогда:

$$f_\vartheta(x) - (d - \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_\vartheta(x) + d - \varepsilon \quad (\|x\| \leqslant 1,\ \varphi \in K),$$

$$\overline{\lim_\vartheta} f_\vartheta(x) - (d - \varepsilon) \leqslant \inf_t \sup_{\vartheta \leqslant t} f_\vartheta(x) - (d - \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_t \inf_{\vartheta \leqslant t} f_\vartheta(x) + d - \varepsilon = \underline{\lim_\vartheta} f_\vartheta(x) + d - \varepsilon.$$

С другой стороны:

$$\underline{\lim_\vartheta} f_\vartheta(x) \leqslant f_0(x) \leqslant \overline{\lim_\vartheta} f_\vartheta(x) \quad (x \in E).$$

Отсюда вытекает:

$$f_0(x) - (d - \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_0(x) + d - \varepsilon \quad (\|x\| \leqslant 1,\ \varphi \in K).$$

Последнее означает, что $\sup\limits_{\varphi \in K} \|\varphi - f_0\| \leqslant d - \varepsilon$, т. е. $f_0 \in K_\varepsilon$.

Обозначим через ε' точную верхнюю грань чисел ε, для которых множество K_ε является непустым. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел и $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = \varepsilon'$. Множества невозрастающей последовательности $\{K_{\varepsilon_n}\}$ выпуклы, ограничены и трансфинитно-замкнуты, следовательно, их пересечение K^1 непусто и обладает этими же свойствами. Очевидно, что K^1 является правильной частью K.

Мы строим теперь трансфинитную последовательность множеств $\{K^\vartheta\}$ следующим образом. Если трансфинитный номер ϑ не является предельным, то K^ϑ строится из $K^{\vartheta-1}$ так же, как K^1 было построено из K. Если ϑ_1 — предельный трансфинитный номер, то полагаем $K^{\vartheta_1} = \underset{\vartheta < \vartheta_1}{D} K^\vartheta$. Все K^ϑ непусты ([2]) и образуют убывающую трансфинитную последовательность множеств. Так как K имеет определенную мощность, то процесс построения K^ϑ обрывается на некотором трансфинитном номере ϑ_0 и K^{ϑ_0} состоит из одной точки f^0. Точку f^0 мы называем центром множества K.

Примечание. Конструкцию центра можно осуществить для любого выпуклого компакта K пространства E (E — любое пространство типа (B)). Действительно, компакт K не может содержать диаметральной последовательности и поэтому имеет нормальную структуру. Компактность K также гарантирует, что все множества K^ϑ являются непустыми.

Теорема 3. *Если K — выпуклое ограниченное множество в E (либо в E^*), обладающее центром, и C_K — совокупность всех изометрических отображений K на себя, то центр f^0 множества K является фикспунктом для каждого из этих отображений.*

Действительно, легко убедиться в том, что операторы из C_K инвариантны в каждом из множеств K_ε и K^ϑ, участвующих в конструкции центра. Следовательно, все операторы из C_K инвариантны в пересечении всех K^ϑ, иначе говоря точка f^0 (центр K), является общим фикспунктом совокупности C_K.

Определение. Оператор U, действующий в метрическом пространстве K, называется несуживающим, если расстояние между образами любых 2 точек не меньше расстояния между самими точками.

Лемма. *Пусть K — компактное метрическое пространство, K_1 — его замкнутая часть, U — несужающее и непрерывное отображение K_1 в K. Если $UK_1 \subset K_1$ или $UK_1 \supset K_1$, то $K_1 = UK_1$.*

Доказательство. 1) Пусть $UK_1 \subset K_1$, $y_0 \in K_1 - UK_1$ и ε есть расстояние от y_0 до UK_1. Тогда $\|y_0 - z\| \geqslant \varepsilon > 0$ при всех $z \in UK_1$. В частности,

$$\|U^p y_0 - U^{p+q} y_0\| \geqslant \|y_0 - U^q y_0\| \geqslant \varepsilon \quad (p, q = 1, 2, \ldots),$$

что противоречит компактности K. Этим доказано, что $UK = K$.

2) Пусть теперь $UK_1 \supset K_1$ и $y_0 \in UK_1 - K_1$. Тогда $y_0 = Uy_1$, $y_1 \in K_1 \subset UK_1$, следовательно $y_1 = Uy_2$, $y_2 \in K_1 \subset UK_1$ и т. д. Выберем $y_p \in K_1$ так, чтобы $y_0 = U^p y_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Если ε есть расстояние от y_0 до K_1, то $\varepsilon > 0$ и

$$\|U^{p+q} y_0 - U^q y_0\| = \|U^{p+q} y_0 - U^{p+q} y_p\| \geqslant \|y_0 - y_p\| \geqslant \varepsilon$$
$$(p, q = 1, 2, \ldots).$$

Последние неравенства противоречат компактности K, следовательно, $UK_1 = K_1$.

Теорема 4. *Центр f^0 выпуклого компакта является общим фикспунктом всех непрерывных несужающих отображений K в свою часть.*

Доказательство. Если U — одно из таких отображений, то по первой части леммы $UK = K$. Пусть $x_0 \in K_\varepsilon$ и $x \in K$. Тогда (обозначая через d диаметр K)

$$\|Ux_0 - Ux\| \geqslant \|x_0 - x\| \geqslant d - \varepsilon.$$

Так как $UK = K$, то отсюда следует, что $Ux_0 \in K_\varepsilon$. Таким образом, $UK_\varepsilon \subset K_\varepsilon$, и по второй части леммы $UK_\varepsilon = K_\varepsilon$. Применяя аналогично первую и вторую части леммы ко всем множествам, возникающим при построении центра, мы получим $Uf^0 = f^0$.

В заключение отметим, что в конечномерном ограниченном выпуклом множестве возможна конструкция центра, отличная от предложенной выше. Именно, пусть E_K — наименьшее линейное многообразие, содержащее K. Множество K содержит точки, внутренние относительно E_K. При достаточно малом положительном числе ε существуют в K точки, ε-окрестность которых (по отношению к E_K) также принадлежит K. Совокупность таких точек мы обозначим через K_ε и максимальное среди возможных чисел ε обозначим через ε_1.

Легко видеть, что множество K_{ε_1} непусто и выпукло. Очевидно также, что множество K_{ε_1} не является телом относительно E_K. Обозначим $K_1 = K_{\varepsilon_1}$. Построим теперь последовательность множеств $\{K_j\}$, получая каждое последующее из предыдущего таким же образом, как K_1 было получено из K. Так как при каждом шаге размерность понижается, то после конечного числа шагов мы придем к некоторой точке, которую и назовем центром (второй конструкции) множества K. Нетрудно видеть, что центр второй конструкции также является фикспунктом для каждого изометрического отображения множества K на себя.

Одесский институт мукомольной промышленности и элеваторного хозяйства им И. В. Сталина и Одесский электротехнический институт связи

Поступило
24 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, 1932. [2] В. Шмульян, Математ. сб., 5, № 2, 317 (1939).