Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Будем обозначать через

$$P_{n_1\ldots n_k}(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{\substack{0\leqslant i_h\leqslant n_h\\1\leqslant h\leqslant k}} A_{i_1\ldots i_k}\frac{x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}}{i_1!\ldots i_k!}$$

многочлен степени не выше n_h по каждой из k переменных x_h $(1\leqslant h\leqslant k)$.

Теорема 1 (Распространение неравенств В. А. Маркова). *Если многочлен*

$$|P_{n_1\ldots n_k}(x_1,\ldots,x_k)|\leqslant M \tag{1}$$

в k-мерном кубе $-1\leqslant x_h\leqslant 1$ $(1\leqslant h\leqslant k)$, то

$$|A_{i_1,\ldots,i_k}|=\left|\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}P_{n_1,\ldots,n_k}(x_1,\ldots,x_k)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_k^{i_k}}\right|_{x_1=\ldots=x_2=0}\leqslant\left|B_{i_1}^{(n_1)}\ldots B_{i_k}^{(n_k)}\right|M, \tag{2}$$

полагая

$$T_{(n)}(x)=\cos(n)\arccos x=\sum_{0\leqslant i\leqslant(n)} B_i^{(n)}\frac{x^i}{i!}, \tag{3}$$

где $(n)=n$ в случае $n-i$ четного и $(n)=n-1$, если $n-i$ нечетно

Ввиду того, что доказательство не зависит от числа переменных k, ограничимся предположением, что $k=2$, и положим $x_1=x$, $x_2=y$. В таком случае, полагая

$$P_{n_1n_2}(x,y)=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n_1\\0\leqslant j\leqslant n_2}} A_{ij}\frac{x^iy^j}{i!j!}=\sum_{i\leqslant n_1} Q_i^{(n_2)}(y)\frac{x^i}{i!},$$

где $Q_i^{(n_2)}(y)=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n_2} A_{ij}\frac{y^j}{j!}$ — многочлены степени $\leqslant n_2$, и применяя к $P_{n_1n_2}(x,y)$, рассматриваемому как многочлен степени n_1 по x, неравенства В. А. Маркова, находим, что

$$|Q_i^{(n_2)}(y)|\leqslant B_i^{(n_1)}M \quad (-1\leqslant y\leqslant 1).$$

Поэтому, применяя вторично неравенства В. А. Маркова к каждому из многочленов $Q_i^{(n_2)}(y)$, получаем, что

$$|A_{ij}| \leqslant B_i^{(n_1)} B_j^{(n_2)} M. \qquad (2^{\text{bis}})$$

При этом правые части неравенств (2^{bis}) (как и (2)) не могут быть снижены, так как при любых значениях i, j ($0 \leqslant i \leqslant n_1$, $0 \leqslant j \leqslant n_2$) они достигаются для одного из четырех многочленов

$$P_{n_1 n_2}(x, y) = MT_{(n_1)}(x)\, T_{(n_2)}(y).$$

Аналогичным образом распространяются и теоремы В. А. Маркова о максимуме производных, а именно*: при (1)

$$\left| \frac{\partial^{i+j} P_{n_1 n_2}(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leqslant MT_{n_1}^{(i)}(1)\, T_{n_1}^{(j)}(1) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1).$$

Теорема 2. *Если многочлен $P_{n_1, \ldots, n_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ удовлетворяет неравенству* (1) *в k-мерном кубе* ($-1 \leqslant x_i \leqslant 1$) ($i = 1, 2, \ldots, k$), *то при любых действительных*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ ($\xi_1 > 1, \ldots, \xi_k > 1$)

$$P_{n_1 \ldots n_k}(\pm\xi_1, \pm\xi_2, \ldots, \pm\xi_k) \leqslant T_{n_1}(\xi_1)\, T_{n_2}(\xi_2) \ldots T_{n_k}(\xi_k)\, M. \qquad (4)$$

В самом деле, ограничиваясь, как и раньше, случаем $k=2$ (ввиду аналогичности рассуждения), замечаем, что для $P_{n_1 n_2}(x, y) = MT_{n_1}(x) T_{n_2}(y)$ неравенство (4) обращается в равенство. Таким образом, требуется лишь показать, что равенство

$$P_{n_1 n_2}(x, y) = M_1 T_{n_1}(x)\, T_{n_2}(y) + Q_{n_1 n_2}(x, y), \qquad (5)$$

где $Q_{n_1 n_2}(\xi, \eta) = 0$ ($\xi > 1$, $\eta > 1$), несовместимо с неравенством (1) при $M < M_1$.

Для этого замечаем, что

$$Q_{n_1 n_2}\left(\cos\frac{i\pi}{n_1}, \cos\frac{j\pi}{n_2}\right) = P_{n_1 n_2}\left(\cos\frac{i\pi}{n_1}, \cos\frac{j\pi}{n_2}\right) + (-1)^{i+j+1} M_1.$$

Следовательно, при условии $M < M_1$ многочлен $Q_{n_1 n_2}\left(x, \cos\dfrac{j\pi}{n_2}\right)$ степени n_1 по x имеет последовательно чередующиеся знаки $(-1)^{i+j+1}$ в точках $x_i = \cos\dfrac{i\pi}{n_1}$ ($i = 0, 1, \ldots, n_1$), а потому при всех $\xi > 1$ сохраняет постоянный знак $(-1)^{j+1}$, т. е. $(-1)^j Q_{n_1 n_2}\left(\xi, \cos\dfrac{j\pi}{n_2}\right) < 0$ ($j = 0, 1, \ldots, n_2$).

Таким образом, при любом фиксированном $\xi > 1$ многочлен $Q_{n_1 n_2}(\xi, y)$ степени n_2 по y имеет все свои n_2 корней в промежутке ($-1 < y < 1$) и $Q_{n_1 n_2}(\xi, \eta) < 0$ при всех $\eta > 1$, что противоречит предположению $Q(\xi, \eta) = 0$.

Теорема 2 может быть обобщена и дополнена при любом числе переменных так же, как это было сделано мною для случая одной переменной ([3]). Для упрощения письма положим $k = 2$.

---

* См. также ([4]), гл. VII.

** Для любых комплексных $\xi_1, \ldots, \xi_k$ правая часть неравенства заменяется $\left|\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - 1}\right|^{n_1} \ldots \left|\xi_k + \sqrt{\xi_k^2 - 1}\right|^{n_k} M_1$, но это значение, вообще, не достигается; точное значение асимптотически равно $\left|T_{n_1}(\xi_1) \ldots T_{n_k}(\xi_k)\right| M$ (см. ([1, 2])).

Теорема 3. *Если неравенство* (1) *соблюдено лишь в* $N=(n_1+1)(n_2+1)$ *точках* $\left(x_i=\cos\frac{i\pi}{n_1},\ y_j=\cos\frac{j\pi}{n_2}\right)$, *то во всех точках* $(\pm\xi, \pm\eta)$, *где* $\xi>1$, $\eta>1$, *имеет место неравенство*

$$|P_{n_1 n_2}(\pm\xi, \pm\eta)| \leqslant MT_{n_1}(\xi)\,T_{n_2}(\eta). \tag{4$^{\text{bis}}$}$$

Если данные N *интерполяционных узлов* (a_l, b_l) $(a_l^2\leqslant 1,\ b_l^2\leqslant 1)$, $1\leqslant l\leqslant N=(n_1+1)(n_2+1)$, *в которых соблюдено* (1), *не все совпадают с указанными узлами Чебышева* $\left(\cos\frac{i\pi}{n_1}, \cos\frac{j\pi}{n_2}\right)$, *то неравенство* ($4^{\text{bis}}$) *может нарушиться**.

Первое утверждение вытекает непосредственно из данного выше доказательства теоремы 2. Для доказательства второго утверждения из интерполяционной формулы

$$P_{n_1 n_2}(x, y) = \sum_{l=1}^{N} P_{n_1 n_2}(a_l, b_l)\, R^{(l)}_{n_1 n_2}(x, y) \tag{6}$$

замечаем, что максимальное значение $P_{n_1 n_2}(\xi, \eta)$ достигается тогда и только тогда, когда $P_{n_1 n_2}(a_l, b_l)=\varepsilon_l M$, где $\varepsilon_l=\pm 1$, причем $\varepsilon_l R^{(l)}_{n_1 n_2}(\xi, \eta)>0$ для всех значений l, для которых $R^{(l)}_{n_1 n_2}(\xi, \eta)\gtreqless 0$. В частности, при узлах Чебышева этот максимум, равный $MT_{n_1}(\xi)\,T_{n_2}(\eta)$, достигается многочленом $MT_{n_1}(x)T_{n_2}(y)$, так что $|MT_{n_1}(a_l)\,T_{n_2}(b_l)|<M$ во всех данных точках (a_l, b_l), отличных от $\left(\cos\frac{i\pi}{n_1}, \cos\frac{j\pi}{n_2}\right)$. Следовательно, максимум $P_{n_1 n_2}(\xi, \eta)$, соответствующий узлам (a_l, b_l), не превысил бы $MT_{n_1}(\xi)\,T_{n_2}(\eta)$ лишь в том случае, когда $R^{(l)}_{n_1 n_2}(\xi, \eta)=0$ для всех узлов (a_l, b_l), отличных от $\left(\cos\frac{i\pi}{n_1}, \cos\frac{j\pi}{n_2}\right)$, но это невозможно, так как из формулы (6) вытекало бы тогда ложное утверждение, что всякий многочлен $P_{n_1 n_2}(x, y)$, равный нулю только в узлах (a_l, b_l), совпадающих с узлами Чебышева, должен быть равен также нулю при $x=\xi$, $y=\eta$.

Следствие. *Многочлены*

$$P_{n_1\ldots n_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \pm MT_{n_1}(x_1)\ldots T_{n_k}(x_k)$$

являются единственными, для которых при условии (1) *неравенства* (4) *обращаются в равенства.*

Заметим также, что если не все $\xi_i>1$, то в правой части неравенства (4) фигурируют только те множители $T_{n_i}(\xi_i)$, для которых $\xi_i>1$. Например, в случае двух переменных x, y, если $\xi>1$, $\eta\leqslant 1$, то $|P_{n_1 n_2}(\pm\xi, \pm\eta)|\leqslant MT_{n_1}(\xi)$. В числе многочленов $P_{n_1 n_2}(x, y)$, осуществляющих знак равенства, будет тогда не только $\pm MT_{n_1}(x)$, но также,

* Мы называем N точек (a_l, b_l) интерполяционными узлами порядка N, если из равенств $P_{n_1 n_2}(a_l, b_l)=0$ $(l=1, \ldots,\ N=(n_1+1)(n_2+1))$ следует, что $P_{n_1 n_2}(x, y)\equiv 0$ тождественно. В таком случае существует один и только один многочлен $R^{(i)}_{n_1 n_2}(x, y)$, удовлетворяющий условиям $R^{(i)}_{n_1 n_2}(a_i, b_i)=1$, $R^{(i)}_{n_1 n_2}(a_k, b_k)=0$ при $k\gtrless 1$. Ввиду того, что всякая система N точек (a_l', b_l') является пределом интерполяционных узлов (a_l, b_l), можно доказать, что теорема остается в силе для любых N точек (a_l', b_l') $(a_l'^2\leqslant 1, b_l'^2\leqslant 1)$.

например, и многочлены $MT_{n_1}(x)R_{n_2}(y)$, удовлетворяющие лишь условиям $R_{n_2}(\eta)=\pm 1$ и $|R_{n_2}(y)|\leqslant 1$ при $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Укажем еще аналогичные экстремальные свойства многочлена

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)=\sum_{l=0}^{n}\frac{q_l(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{l!},$$

где $q_l(x_1, \ldots, x_k)$ — однородные многочлены степени l, а n — порядок многочлена $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, т. е. наибольшее значение суммы показателей при $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Теорема 4. *Если*

$$|P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)|\leqslant M \tag{7}$$

внутри сферы $\sum_1^k x_i^2=R_0^2$, *то*: 1) *на сфере радиуса* $R>R_0$

$$|P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)|\leqslant MT_n\left(\frac{R}{R_0}\right); \tag{8}$$

2) *на любой сфере радиус* $\rho\left(\sum_1^k x_i^2=\rho^2\right)$

$$|q_l(x_1, x_2, \ldots, x_k)|\leqslant MB_l^{(n)}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^l. \tag{9}$$

Правая часть неравенства (9) достигается, когда $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)= = MT_{(n)}\left(\frac{\Sigma\alpha_i x_i}{R_0}\right)\ \left(\sum\alpha_i^2=1\right)$; правая часть неравенства (8) достигается во всех точках сферы S_R радиуса R многочленом $MT_n\left(\frac{\sqrt{\Sigma x_i^2}}{R_0}\right)$ при n четном, и при любых n в точке $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ сферы S_R — многочленом $MT_n\left(\frac{\Sigma\xi_i x_i}{RR_0}\right)$.

Полученные результаты легко обобщаются, если заменить кубы любыми параллелепипедами и сферы эллипсоидами.

Поступило
25 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. математ. об-ва, 13 (1913). [2] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1935. [3] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. математ. об-ва, 14 (1915).