УДК 512.8:621.313

ОСНОВЫ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В.И.Луковников, Л.С.Середа

Гомельский политехнический институт

Установившиеся токи (напряжения) электрических цепей с постоянными, переменными или нелинейными параметрами при периодических воздействиях обычно определяют в виде суммы нескольких членов ряда Фурье. При этом трудно добиться высокой точности аналитического решения, так как увеличение числа учитываемых гармоник приводит к пропорциональному увеличению числа конечных алгебраических уравнений как при использовании методов гармонического баланса или Галеркина-Бубнова, так и при применении комплексного метода Пухова.

Если же решение находить в виде произведения нескольких гармонических составляющих, то, применяя обобщенный комплексный метод [I], можно существенно повысить точность аналитического решения как при сокращении числа конечных уравнений, так и при записи их, кроме одного, с нулевой правой частью.

Пусть искомая временная функция тока (напряжения) представлена в общем случае в виде произведения

$$f(t)=\prod_{n=1}^{N}\sum_{\nu_n=0}^{\infty}F_{\nu_n}\sin(\nu_n\omega_n t+\alpha_{\nu_n}), \tag{1}$$

где F_{ν_n}, α_{ν_n} – амплитуды и фазы гармонических сомножителей с номерами ν_n при круговых частотах ω_n.

Если обозначить $\omega_1 t=\theta_1$, $\omega_2 t=\theta_2,\ldots,$ $\omega_N t=\theta_N$, то (1) можно записать как

$$\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)=\prod_{n=1}^{N}\sum_{\nu_n=0}^{\infty}F_{\nu_n}\sin(\nu_n\theta_n+\alpha_{\nu_n}).$$

Тогда предлагаемое гиперкомплексное прямое преобразование функции $f(t)$ (ее изображение) имеет вид

$$GK_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}[f(t)]=F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}=\pi^{-N}\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{N}\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left[-j_n\nu_n(\theta_n-\pi/2)\right]d\theta_n. \tag{2}$$

Обратное гиперкомплексное преобразование (восстановление оригинала по изображению) осуществляется по выражению

$$GK^{-1}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\left[F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\right]=f(t)=$$
$$=2^{-N}\underbrace{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{\nu_N=0}^{\infty}}_{N}\left\{F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left[j_n(\nu_n\omega_n t-\pi/2)\right]-\right.$$
$$\left.-\overset{*}{F}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left[-j_n(\nu_n\omega_n t-\pi/2)\right]\right\}. \tag{3}$$

В выражениях (2) и (3) через $j_1, j_2, \ldots, j_N$ обозначены разные мнимые единицы, соответствующие различным частотам; $GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}$ и $GK^{-1}_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}$ – операции прямого и обратного гиперкомплексных преобразований порядка N; $F_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}$, $F_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}$ – гиперкомплексное и сопряженное по всем мнимым еденицам изображение функции $f(t)$ порядка N.

Основываясь на свойствах и приемах многократного интегрирования, можно доказать следующие основные теоремы и правила гиперкомплексного преобразования, аналогичные свойствам многомерного преобразования Лапласа или Фурье.

1. Изображение произведения оригинала на постоянную величину

$$GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[R\cdot f(t)\right] = R\cdot F_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}. \qquad (4)$$

2. Изображение суммы оригиналов

$$GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[\sum_{m=1}^{M} f_m(t)\right] = \sum_{m=1}^{M} GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[f_m(t)\right]. \qquad (5)$$

3. Теорема смещения:

$$GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[f(t)\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left(\pm j_n\lambda_n\omega_n t\right)\right] = F_{\nu 1\mp\lambda 1,\ \nu 2\mp\lambda 2,\ldots,\ \nu N\mp\lambda N}. \qquad (6)$$

Здесь λ_n – целые числа.

4. Теорема запаздывания (опережения):

$$GK^{-1}_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[F_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left(\pm j_n\omega_n\tau_n\right)\right] = f\left[\omega_1(t\pm\tau_1),\omega_2(t\pm\tau_2),\ldots,\omega_N(t\pm\tau_N)\right]. \qquad (7)$$

Здесь $\tau_n < \omega_n/2\pi$ и $f(t)$ должна иметь форму (I).

5. Теорема подобия

$$GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[\varphi\left(a_{\nu 1}\nu_1\theta_1,\ a_{\nu 2}\nu_2\theta_2,\ldots,a_{\nu n}\nu_n\theta_n\right)\right] = \left(\prod_{n=1}^{N}a_n\right)^{-1}\cdot F\left(a^{-1}_{\nu 1}j_1\nu_1\omega_1,\ a^{-1}_{\nu 2}j_2\nu_2\omega_2,\ldots,a^{-1}_{\nu N}j_N\nu_N\omega_N\right). \qquad (8)$$

6. Изображение произведения оригиналов

$$GK_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}\left[f_a(t)\cdot f_b(t)\right] = \left(\prod_{n=1}^{N}2j_n\right)^{-1}\sum_{\mu 1=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu 2=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{\mu N=-\infty}^{\infty}GK_{\nu 1-\mu 1,\nu 2-\mu 2,\ldots,\nu N-\mu N}\left[f_a(t)\right]\cdot GK_{\mu 1,\mu 2,\ldots,\mu N}\left[f_b(t)\right]. \qquad (9)$$

Здесь надо учитывать, что изображение с отрицательным номером (номерами) равно изображению с тем же положительным номером (номерами), взятому с обратным знаком и сопряженному по мнимой еденице (еденицам), соответствующей данному номеру (номерам).

Например, $F_{(-\nu_1),\nu_2,\ldots,\nu_N} = -F^*_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}$, $F_{(-\nu_1),(-\nu_2),\ldots,\nu_N} = +F^*_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}$,

$$F_{(-\nu_1),(-\nu_2),\ldots,(-\nu_N)} = \pm F^*_{\overset{*}{\nu_1},\overset{*}{\nu_2},\ldots,\overset{*}{\nu_N}} = \pm \overset{*}{F}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}$$

(знак "плюс" при N – четном, "минус" – при N нечетном).

7. Изображение произведения оригинала на гармоническую функцию

$$GK_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\left[f(t)\cdot \sin(\lambda_n\omega_n t+\beta)\right] = (2j_n)^{-1}\cdot\left(F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n-\lambda_n,\ldots,\nu_N}\cdot e^{j_n\beta} - F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n-\lambda_n,\ldots,\nu_N}\cdot e^{-j_n\beta}\right). \qquad (10)$$

Здесь λ_n – целое число.

8. Изображение производной от оригинала

$$GK_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\left[\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right] = \left(\sum_{n=1}^{N} j_n\nu_n\omega_n\right)^m\cdot F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}. \qquad (11)$$

Здесь m – порядок производной, а $f(t)$ должна иметь форму (I).

9. Изображение интеграла от оригинала

$$GK_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}\left[\underbrace{\iint\ldots\int}_{m} f(t)\,dt^m\right] = \left(\sum_{n=1}^{N} j_n\nu_n\omega_n\right)^{-m}\cdot F_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}. \qquad (12)$$

Здесь m – порядок интегрирования, а $f(t)$ должна иметь форму (I).

Укажем, что изложенное здесь гиперкомплексное исчисление (2)-(12) порядка N переходит при $N=1$ в известное комплексное исчисление, а при $N=2$ в бикомплексное [2].

Применяя гиперкомплексное преобразование (2) и используя свойства (4)-(12), получим при постоянном R_1

$$U_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N} = R_1\cdot I_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}, \qquad (13)$$

при переменном $R_2(t)$

$$U_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N} = \left(\prod_{n=1}^{N} 2j_n\right)^{-1}\sum_{\mu_1=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu_2=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{\mu_N=-\infty}^{\infty} I_{\nu_1-\mu_1,\nu_2-\mu_2,\ldots,\nu_N-\mu_N}\cdot R_{2\,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N} = R_2(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N)\cdot I_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}, \qquad (14)$$

если $R_3(i)$ нелинейное, то

$$U_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N} = \pi^{-N}\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{N} i(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)\cdot R_3\left[i(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)\right]\times \prod_{n=1}^{N}\exp\left[-j_n\nu_n(\theta_n-\pi/2)\right]\cdot d\theta_n = R_3(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N)\cdot I_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N}. \qquad (15)$$

Для индуктивности L мгновенные значения напряжения u и тока i связаны законом электромагнитной индукции: $u = d(Li)/dt$.

В гиперкомплексном виде при постоянной L_1

$$U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_N\nu_N\omega_N\right)L_1 I_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}; \qquad (16)$$

при переменной $L_2(t)$

$$U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\left(\prod_{n=1}^{N}2j_n\right)^{-1}\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_N\nu_N\omega_N\right)\times$$

$$\times\underbrace{\sum_{\mu 1=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu 2=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{\mu N=-\infty}^{\infty}}_{N} I_{\nu 1-\mu 1,\nu 2-\mu 2,\ldots,\nu N-\mu N}\cdot L_{2\mu 1,\mu 2,\ldots,\mu N}, \qquad (17)$$

при нелинейной $L_3(i)$

$$U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\pi^{-N}\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_N\nu_N\omega_N\right)\times$$

$$\times\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{N} i\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N\right)L_3\left[i\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N\right)\right]\cdot\prod_{n=1}^{N}\exp\left[-j_n\nu_n\left(\theta_n-\pi/2\right)\right]d\theta_n. \qquad (18)$$

Для емкости мгновенные значения тока i и напряжения U связаны соотношением $i=d(C_u)/dt$.

По аналогии с (I6), (I7) и I8) при $C_1=const$

$$I_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_n\nu_n\omega_N\right)C_1 U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}, \qquad (19)$$

при $C_2(t)=var$

$$I_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_N\nu_N\omega_N\right)\cdot C_2\left(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N\right)\cdot U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}, \qquad (20)$$

при $C_3(i)$ нелинейной

$$I_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}=\left(j_1\nu_1\omega_1+j_2\nu_2\omega_2+\ldots+j_N\nu_N\omega_N\right)\cdot C_3\left(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_N\right)\cdot U_{\nu 1,\nu 2,\ldots,\nu N}. \qquad (21)$$

Полученные соотношения (I3)-(2I) позволяют рассчитать установившийся режим линейной, параметрической и нелинейной электрической цепей при периодическом воздействии. Так, например, в работе [3] был рассчитан колебательный режим работы асинхронных электродвигателей бикомплексным методом ($N=2$).

Литература

I. Луковников В.И. Обобщение и развитие символического метода расчета линейных и нелинейных электрических цепей // 3 Международный симпозиум по теоретической электротехнике. М., 1985. С. 5-6.
2. Луковников В.И. Основы бикомплексного исчисления и его применение к расчету электромеханических систем с модуляцией // Электричество, 1978. № 2. С. 26-31.
3. Луковников В.И. Электропривод колебательного движения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.