Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

ГЕОФИЗИКА

В. Б. ШТОКМАН

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОЛЕМ ВЕТРА, ПОЛЕМ ПОЛНЫХ ПОТОКОВ И СРЕДНИМ ПОЛЕМ МАСС В НЕОДНОРОДНОМ ОКЕАНЕ

(Представлено академиком П. П. Ширшовым 9 XII 1947)

Классическая теория горизонтальной циркуляции в однородном океане, построенная В. Экманом ([1]), страдает тем недостатком, что в этой теории учитываются лишь силы трения, действующие в горизонтальных плоскостях. В связи с этим при установившемся движении у дна моря должны возникать столь же большие вертикальные градиенты скорости, какие имеют место в поверхностном слое моря. Этот результат не согласуется с данными наблюдений, согласно которым вертикальные градиенты скорости в неоднородном океане быстро затухают с увеличением глубины и у дна практически ничтожны. Столь быстрое затухание вертикальных градиентов скорости является следствием интенсивного горизонтального обмена количества движения, создающего большие силы трения в вертикальных плоскостях, параллельных горизонтальным компонентам потока, которые почти целиком уравновешивают тангенциальные напряжения, создаваемые ветром на поверхности неоднородного океана. Таким образом, отличительной чертой установившегося движения в неоднородном океане является тот, установленный опытом факт, что силы трения у дна океана весьма малы по сравнению с напряжениями, создаваемыми турбулентным „боковым“ трением. Основываясь на этих данных, систему уравнений для стационарных полных потоков в неоднородном океане можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&A_l\left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}\right)+T_x+c\bar{\rho}S_y=g\,\frac{\partial Q}{\partial x},\\
&A_l\left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}\right)+T_y-c\bar{\rho}S_x=g\,\frac{\partial Q}{\partial y},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где A_l обозначает величину (порядка 10^8 CGS) коэффициента горизонтального турбулентного трения, $c=2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести, T_x и T_y — компоненты тангенциального давления ветра на поверхности океана вдоль горизонтальных осей координат x и y, $\bar{\rho}$ — средняя плотность воды в столбе от поверхности ($z=0$) до дна ($z=h$) океана, S_x и S_y — компоненты полного потока:

$$S_x=\int\limits_0^h u\,dz,\qquad S_y=\int\limits_0^h v\,dz,$$

где u и v горизонтальные составляющие скорости течения. В свою очередь

$$Q=\int_0^h dz\int_0^z \rho dz.$$

Уравнение неразрывности для полных потоков можно писать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}S_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}S_y)=0.$$

Так как изменения $\bar{\rho}$ вдоль x и y очень малы по сравнению с аналогичными изменениями S_x и S_y, то в предыдущем уравнении величиной $\bar{\rho}$ можно пренебречь и писать:

$$\operatorname{div}S=\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}=0. \tag{2}$$

По той же причине при дифференцировании уравнений (1) по x и y величину $\bar{\rho}$ можно положить приближенно равной единице. Исключая из уравнений (1) величины $\partial Q/\partial x$ и $\partial Q/\partial y$, мы, в силу (2), получим:

$$\nabla^2 \operatorname{rot} S=-\operatorname{rot} T/A_l, \tag{3}$$

где $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, $\operatorname{rot} T=\partial T_y/\partial x-\partial T_x/\partial y$, $\operatorname{rot} S=\partial S_y/\partial x-\partial S_x/\partial y$.

Если пользоваться функцией полных потоков ψ, связанной с их компонентами соотношениями:

$$S_x=-\partial\psi/\partial y, \qquad S_y=\partial\psi/\partial x, \tag{4}$$

то (3) преобразуется в уравнение

$$\nabla^4\psi=-\operatorname{rot} T/A_l, \tag{5}$$

аналогичное уравнению равновесия пластины под действием приложенных нагрузок (им аналогична величина $-\operatorname{rot} T$). В уравнении (5) посредством ∇^4 обозначен бигармонический оператор. Краевые условия для полных потоков на контуре Г берега моря аналогичны условиям защемления пластины:

$$(\psi)_{\Gamma}=0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{\Gamma}=0, \tag{6}$$

где n — направление нормали к контуру. Условия (6) получаются из соображений, что касательная и нормальная компоненты полного потока у берега должны обращаться в нуль. Найдем теперь уравнение, связывающее поле масс с полем ветра. Определяя S_x из второго уравнения (1) и подставляя его в первое уравнение (1), решаем последнее относительно S_y:

$$cS_y=g\frac{\partial Q}{\partial x}-T_x+\frac{A_l g}{c}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q-\frac{A_l}{c}\nabla^2 T_y-\frac{A_l^2}{c}\nabla^4 S_y. \tag{7}$$

Аналогично:

$$cS_x=-g\frac{\partial Q}{\partial y}+T_y+\frac{A_l g}{c}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 Q-\frac{A_l}{c}\nabla^2 T_x-\frac{A_l^2}{c}\nabla^4 S_x. \tag{8}$$

Дифференцируя (7) по y, (8) по x и складывая результаты, получим:

$$c\operatorname{div}S=\operatorname{rot}T+\frac{A_l g}{c}\nabla^4 Q-\frac{A_l}{c}\nabla^2\operatorname{div}T-\frac{A_l^2}{c}\nabla^4\operatorname{div}S$$

или, в силу условия (2):

$$\nabla^4 Q = \frac{1}{g}\left(-\frac{c \operatorname{rot} T}{A_l} + \nabla^2 \operatorname{div} T\right). \qquad (9)$$

Таким образом, распределение масс, характеризуемое Q, зависит не только от параметра Кориолиса и $\operatorname{rot} T$, но и от величины $\nabla^2 \operatorname{div} T = \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} T$. Последняя обычно очень мала в сравнении с первым членом в (9). Ею, однако, пренебрегать нельзя в областях резкой сходимости или расходимости воздушных течений (например центр циклона или антициклона). Если пользоваться для характеристики поля масс величиной P, связанной с динамической высотой соотношением: $P = \int_0^h D dz = \bar{D} h$, измеряя при этом высоты $\bar{D}$ в динамических сантиметрах, то предыдущее уравнение запишется в виде:

$$\nabla^4 \bar{D} = \frac{1}{10_3 h}\left(-\frac{c \operatorname{rot} T}{A_l} + \nabla^2 \operatorname{div} T\right). \qquad (10)$$

Граничные условия, налагаемые на Q или D, мы найдем из уравнений (7) и (8). Направляя x по касательной, а y по нормали к берегу в данной точке и памятуя, что у берега $S_x = S_y = 0$, мы получим для Q такие условия:

$$g \frac{\partial Q}{\partial x} - T_x + \frac{A_l g}{c} \nabla^2 \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{A_l}{c} \nabla^2 T_y - \frac{A_l^2}{c} \nabla^4 S_y = 0, \qquad (11)$$

$$-g \frac{\partial Q}{\partial y} + T_y + \frac{A_l g}{c} \nabla^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{A_l}{c} \nabla^2 T_x - \frac{A_l^2}{c} \nabla^4 S_x = 0. \qquad (12)$$

Вспоминая (4), можно написать:

$$\nabla^4 S_y = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^4 \psi, \quad \nabla^4 S_x = -\frac{\partial}{\partial y} \nabla^4 \psi.$$

Подставляя на место $\nabla^4 \psi$ ее выражение через $\operatorname{rot} T$ согласно (5), получим

$$\frac{A_l^2}{c} \nabla^4 S_y = -\frac{A_l}{c} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot} T; \quad \frac{A_l^2}{c} \nabla^4 S_x = \frac{A_l}{c} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot} T. \qquad (13)$$

Подставляя (13) в условия (11) и (12), найдем им равносильные:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{T_x}{g} - \frac{A_l}{c} \nabla^2 \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{A_l}{cg} \nabla^2 T_y - \frac{A_l}{c} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot} T, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{T_y}{g} + \frac{A_l}{c} \nabla^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{A_l}{cg} \nabla^2 T_x - \frac{A_l}{cg} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot} T. \qquad (15)$$

Подставим, наконец, (15) под знак ∇^2 в (14):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{T_x}{g} - \frac{A_l}{c} \nabla^2\left(\frac{T_y}{g} + \frac{A_l}{c} \nabla^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{A_l}{cg} \nabla^2 T_x - \frac{A_l}{cg} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot} T\right) +$$

$$+ \frac{A_l}{cg} \nabla^2 T_y - \frac{A_l}{cg} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{rot} T.$$

Раскрывая операторы и делая приведение подобных членов, убедимся, что все члены кроме первого в правой части написанного условия взаимно сокращаются. Таким образом, мы получаем весьма простое условие на контуре берега:

$$\partial Q/\partial x = T_x/g \tag{16}$$

и, аналогично, второе условие:

$$\partial Q/\partial y = T_y/g. \tag{17}$$

Очевидно, что условия для $\overline{D}$ запишутся в форме:

$$\frac{\partial \overline{D}}{\partial x} = \frac{T_x}{10^3 h}; \quad \frac{\partial \overline{D}}{\partial y} = \frac{T_y}{10^3 h}. \tag{18}$$

Установим теперь связь между полем масс и полными потоками. Дифференцируя первое уравнение (1) по x, второе по y и складывая результаты $(\overline{\rho} = 1)$, получим:

$$g\nabla^2 Q = c \operatorname{rot} S + \operatorname{div} T + A_l \nabla^2 \operatorname{div} S$$

или, в силу условия (2):

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{g}\left(c \operatorname{rot} S + \operatorname{div} T\right). \tag{19}$$

Из (19) следует, что приспособление поля масс к полю полных потоков осуществляется независимо от величины коэффициента горизонтального турбулентного обмена A_l. На экваторе, где $c=0$, приспособление масс регулируется исключительно величиной $\operatorname{div} T$. Заметим, что формулами (7) и (8) можно пользоваться для расчета компонент полных потоков по заданному из наблюдений полю масс и ветра, если подставить в (7) и (8) выражения (13). Мы получим таким образом формулы:

$$S_y = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{T_x}{c} + \frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q - \frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_y + \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{rot} T, \tag{20}$$

$$S_x = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{T_y}{c} + \frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 Q - \frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_x - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{rot} T, \tag{21}$$

заменяющие собой известные формулы Экмана ([2]) и Якхеллна ([3]). Оценка порядка членов в (20) и (21) показывает, что первые три члена в правой части зачастую одинаковы по величине. Следовательно, учет „бокового“ трения и ветра может вносить существенные поправки к формулам Экмана. Если ветер отсутствует или его влиянием можно пренебречь, то выражения (20) и (21) значительно упрощаются.

Автор выражает благодарность П. С. Линейкину за ценные замечания при обсуждении полученных результатов.

Институт океанологии
Академии Наук СССР

Поступило
6 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Шулейкин, Физика моря, 1941, стр. 27—84. [2] V. W. Ekman, Lunds Univ. Årsskr., Afd 2, 25, № 6 (1929). [3] A. Jakhelln, Geophys. Publ., 11, № 11 (1936).