Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

ФИЗИКА

Е. А. ВАЙНРИБ и Г. В. СПИВАК

О КИНЕТИКЕ ЭЛЕКТРОНОВ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 15 XI 1947)

Если на систему заряженных частиц действует постоянное или медленно меняющееся электрическое и магнитное поле, то благодаря градиенту потенциала и диффузии по всем трем координатным направлениям будут итти электрические токи. Поля могут быть также функциями координат. Легко установить критерий того, когда функция распределения электронов по скоростям не будет равновесной функцией. В предшествующем сообщении ([1]) нами был развит общий метод нахождения функций распределения путем применения H-теоремы Больцманна, комбинируемой с 6 интегральными условиями (условия (2) и (3)). При соблюдении условий (2) распределение будет равновесным. При наличии же потоков: энергии, количества движения и момента силы распределение уже не будет равновесным (условия (3)).

В настоящем сообщении будет разобрано, как проявляется на функции распределения электронов в газоразрядной плазме действие магнитного поля и произведено сопоставление линеаризованной функции распределения, определяемой по нашему методу, с функцией, вычисляемой из кинетического уравнения.

Представим себе плазму в цилиндрической трубке в аксиально симметрическом неоднородном* магнитном поле. Для переноса на ось симметрии момента количества движения, создаваемого в местах с большим значением продольной компоненты магнитного поля, необходимо учесть вязкие свойства электронного газа. Если учесть также и то, что происходит перенос тепла (за счет теплопроводности) к стенкам разрядной трубки, то хотя электронный газ и будет в стационарном состоянии, система не будет описываться равновесной функцией распределения, т. е. распределение по скоростям не будет как для неподвижного, так и для подвижного наблюдателя представляться максвелловским. Лишь если пренебречь потоком энергии и переносом вращения, т. е. принять, что вся система вращается вокруг оси симметрии с одинаковой угловой скоростью и температура электронного газа не зависит от r, распределение может быть описано максвелловской функцией (для подвижного наблюдателя). В самом деле, согласно общему правилу (формула (4) статьи ([1])) имеем

$$\delta\int(f\ln f+\lambda_1 f+\lambda_2 p_x f+\lambda_3 p_y f+\lambda_4 p_z f+\lambda_5 \varepsilon f+\lambda_6 M_x f+\lambda_7 M_y f+ \\ +\lambda_8 M_z f)d\tau=0,$$

* Можно ожидать, исходя из представления о поведении плазмы в однородном магнитном поле, что возникает слоевое вращение, а следовательно, и в этом случае в силу дополнительных условий (3) работы ([1]) будет нарушено максвелловское распределение.

откуда

$$f=\exp\left(-1-\lambda_1-\sum_i \lambda' p_i-\lambda_5\varepsilon-\sum_i \lambda'' M_i\right), \qquad (1)$$

где $i=x, y, z$; $\lambda'=\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$; $\lambda''=\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$, причем

$$\varepsilon=\frac{m}{2}\left(\vec{v}^2-\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2\right)+e\varphi.$$

В выражении для энергии второй член представляет „центробежную энергию“ от вращения частицы ([2]) с координатами x, y, z и угловой скоростью Ω в магнитном поле, а $\vec{M}=m\left[\vec{v}\vec{r}\right]$.

Вводя обозначения: $\lambda_2-\lambda_7 z+\lambda_8 y=L_2$, $\lambda_3+\lambda_6 z-\lambda_8 x=L_3$, $\lambda_4-\lambda_6 y+\lambda_7 x=L_4$, представляем показатель функции распределения в виде:

$$-1-\lambda_1+\frac{m}{2\lambda_5}\left(L_2^2+L_3^2+L_4^2\right)-\lambda_5\left(e\varphi-\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2\right)-$$

$$-\frac{m}{2}\lambda_5\left[\left(v_x+\frac{L_2}{\lambda_5}\right)^2+\left(v_y+\frac{L_3}{\lambda_5}\right)^2+\left(v_z+\frac{L_4}{\lambda_5}\right)^2\right]. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и вычисляя нормирующее условие для функции распределения, находим $e^{-1-\lambda_1}$, а приняв $\lambda_5=1/kT$, имеем окончательно:

$$f=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left[(v_x-\bar{v}_x)^2+(v_y-\bar{v}_y)^2+(v_z-\bar{v}_z)^2\right]\right\}. \qquad (3)$$

Здесь $\bar{v}_x=-L_2/\lambda_5$, $\bar{v}_y=-L_3/\lambda_5$, $\bar{v}_z=-L_4/\lambda_5$ представляют дрейфы зарядов по соответствующим осям.

Значение λ_5 получено из представления о том, что ε_m (среднее значение энергии электрона) равно:

$$\varepsilon_m=\frac{3}{2}kT+\frac{m}{2}\left(\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2+\bar{v}_z^2\right)+e\varphi-\frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2, \qquad (4)$$

т. е. средняя энергия складывается из тепловой энергии, энергии направленного движения и потенциальной энергии.

Из сказанного выше ясно, в каких двух случаях следует ожидать нарушения равновесной функции (3). Определим расчет дрейфа в цилиндрической системе координат $\bar{v}_r$, $\bar{v}_\theta$, $\bar{v}_z$, входящих в функцию (3). Пусть электрическое поле мало, магнитное поле однородно, направлено по оси z (ось трубки), l — средний пробег, $\bar{c}$ — средняя тепловая скорость, D — коэффициент диффузии. Тогда:

$$\bar{v}_r=bE_r-\frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial r}-\tau_0\frac{e}{m}H\bar{v}_\theta, \qquad (5)$$

$$\bar{v}_\theta=\tau_0\frac{e}{m}H\bar{v}_r, \qquad (6)$$

$$\bar{v}_z=bE_z.$$

Из (5) и (6) имеем

$$\bar{v}_r=\frac{bE_r-\dfrac{D}{n}\dfrac{\partial n}{\partial r}}{1+\tau_0^2\dfrac{e^2}{m^2}H^2}, \qquad \tau_0=\frac{l}{c}. \qquad (7)$$

Мы видим, что при условии $bE_r - \frac{D}{n}\frac{\partial n}{\partial r}$ имеем $\overline{v}_r = \overline{v}_\theta = 0$, т. е. магнитное поле не вызывает направленных токов в плазме. Соотношения (6) и (7) отличаются от формул, приводимых Тоунсендом [3]. На неточности уравнений Тоунсенда было обращено внимание Тонксом.

Линеаризация функции (3) дает:

$$f = Ae^{-hv^2}[1 + 2h\overline{v}_x v_x + 2\overline{v}_y v_y + \ldots],$$

где $A = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$. Это выражение совпадает с выражением, найденным Гансом [4] путем обобщения метода Лорентца [5] на случай действия на систему помимо электрического еще и магнитного поля.

Необходимо отметить, что в функции Лорентца и Ганса учтен еще градиент температуры. Нами же взят случай изотермической системы. В данном случае речь идет лишь о сравнении. Легко, однако, показать, исходя из формулы (4) (при $\gamma = 0$) нашей работы [1], что „свернутая" функция распределения должна иметь вид:

$$f = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT}\left[(v_x - \overline{v}_x)^2 + (v_y - \overline{v}_y)^2 + (v_z - \overline{v}_z)^2\right]\right) \times$$
$$\times \exp\left[(\lambda_{2T}p_x + \lambda_{3T}p_y + \lambda_{4T}p_z) + (\lambda_5 v_x + \lambda_6 v_y + \lambda_7 v_z)\,\varepsilon\right], \tag{8}$$

где λ_{2T}, λ_{3T}, λ_{4T} представляют соответствующие константы. Константы, связанные с импульсом, получаются один раз из второго интеграла формулы (2) статьи [1]. Второй раз эти константы появятся тогда, когда токов электричества или вещества нет, но есть перенос тепла.

Линеаризация (8) дает:

$$f = Ae^{-hv^2}[1 + 2h\overline{v}_x v_x + 2hv_y\overline{v}_y + (\lambda_{2T} + \lambda_5\varepsilon)\,v_x + (\lambda_{3T} + \lambda_6\varepsilon)\,v_y]. \tag{9}$$

Воспользовавшись выражениями для дрейфов $\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$ в виде:

$$\overline{v}_x = \frac{B_x - \tau_0\varkappa B_y}{1 + \tau_0^2\varkappa^2}, \qquad \overline{v}_y = \frac{B_y + \tau_0\varkappa B_x}{1 + \tau_0^2\varkappa^2}, \tag{10}$$

где $\varkappa = \frac{e}{m}H$, $h = \frac{m}{2kT}$, $X = \frac{e}{m}E_x$, $Y = \frac{e}{m}E_y$, $B_x = \tau_0\left(X - \frac{1}{2h}\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right)$, $B_y = \tau_0\left(Y - \frac{1}{2h}\frac{1}{n}\frac{n\partial}{\partial y}\right)$, получим функцию Ганса, уже с учетом переноса тепла через систему, а положив $\varkappa = 0$, получим функцию Лорентца в электронной теории металлов (с некоторой разницей в константах).

Определим при помощи линеаризованной функции потоки электричества и тепла при $H = 0$. Имеем:

$$i = \frac{\pi^{3/2}}{2}e\tau_0\left[\left(2hAX - \frac{\partial A}{\partial x}\right)\frac{1}{h^{5/2}} + \frac{5}{2}\frac{A}{h^{7/2}}\frac{\partial h}{\partial x}\right], \tag{11}$$

$$Q = \frac{5\pi^{3/2}}{8}m\tau_0\left[\left(2hAX - \frac{\partial A}{\partial x}\right)\frac{1}{h^{7/2}} + \frac{7}{2}\frac{A}{h^{9/2}}\frac{\partial h}{\partial x}\right]. \tag{12}$$

Положив $\partial A/\partial x = \partial h/\partial x = 0$, находим из (11) выражение для коэффициента электропроводности σ_e

$$\sigma_e = \frac{\pi^{3/2}lAe^2}{\overline{c}\,h^{3/2}m}.$$

Полагая в (11) для определения коэффициента теплопроводности σ_W при токе, равном нулю, $2hAX - \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{5}{2}\frac{A}{h}\frac{\partial h}{\partial x}$, имеем из (12)

$$\sigma_W = \frac{5}{8}\pi^{3/2}\frac{l}{c}\,\frac{A}{h^{3/2}}\,\frac{m}{T},$$

а для закона Видеманна — Франца имеем

$$\sigma_W/\sigma_e = 2{,}5\,(k/e)^2, \qquad (13)$$

в то время как по Лорентцу константа равна 2. Последний результат (13) интересен тем, что показывает пригодность статистистических расчетов при помощи функции H и сформулированных нами 6 дополнительных условий.

Метод Лорентца, примененный к вырожденному газу Зоммерфельдом ([6]), также содержится в соответствующей „свернутой" функции, которую легко получить нашим методом,

По общему рецепту ([1]) эта функция имеет вид:

$$f \exp\left\{-\frac{m}{2kT}\left[(v_x - \overline{v}_x)^2 + (v_y - \overline{v}_y)^2 + (v_z - \overline{v}_z)^2\right] - \frac{W_i}{kT} + \right.$$
$$\left. + v_x(\lambda_{2T} + \lambda_5\varepsilon) + v_y(\lambda_{3T} + \lambda_6\varepsilon) + v_z(\lambda_{4T} + \lambda_7\varepsilon)\right\} + f = 1. \qquad (14)$$

Линеаризация (14) дает функцию Зоммерфельда. В функции (14) учтены электрическое и магнитное поле и градиент температуры.

Соотношение (14) интересно в том отношении, что оно годится и при значительном отступлении функции распределения от равновесной. Линеаризованное же выражение, используемое Зоммерфельдом, предполагает слабое нарушение равновесной функции распределения.

В настоящей работе показано, когда следует ожидать отступлений от равновесного максвелловского или иного распределения при воздействии на систему заряженных частиц магнитным полем и наличия перепада электронной температуры по радиусу.

При помощи общего метода, развитого нами, могут решаться разнообразные задачи для статистических совокупностей. Классические расчеты Лорентца и найденные аналогичным методом функции Ганса и Зоммерфельда получаются линеаризацией более общих решений, указанных в настоящей статье.

Поступило
15 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Вайнриб и Г. В. Спивак, ДАН, 59, № 3 (1948). [2] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, 1938. [3] J. S. Townsend, Proc. Roy. Soc., A, 86, 197, 571 (1912); L. Tonks, Phys. Rev., 51, 9, 1025 (1937). [4] R. Gans, Ann. d. Phys., 20, 293 (1906). [5] H. A. Lorentz, The Theory of Electrons, Leipzig, 1906. [6] A. Sommerfeld, Z. f. Phys.., 47, 1, 43 (1928); Rev. of Mod. Phys., 3, 1 (1931).