Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LIX, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. И. ЯКОВЛЕВ

МИКРОФОННЫЕ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 XI 1947)

§ 1. Анализ работы микрофонных цепей ([1], [2]) приводит к уравнению

$$L\frac{di}{dt}+(R-r\cos\omega t)\,i=E, \tag{1,1}$$

в котором i — ток микрофона, t — время, $R(t)=R-r\cos\omega t$ — *переменный* коэффициент, а L, R, r, ω и E — постоянные величины. При $t=0$ ток $i=0$. Необходимо найти $i=f(t)$, где $f(t)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/\omega$. Решение этой задачи не представляет особого труда; его легко провести при помощи обычного приема интегрирования линейных уравнений и определить затем произвольную постоянную из условий периодичности.

Однако для приложений в электротехнике желательно получить периодическое решение непосредственно при помощи ряда Фурье и выразить его коэффициенты через параметры уравнения (1,1). Эту задачу пытались в свое время решить Баркгаузен ([3]), Ветцман ([4]), Пупин ([5]), Яковлев ([6], [7]) и Помей ([8]), однако у них решение не доведено до конца. Мне удалось найти очень простое решение уравнения (1,1) и в нем вывести три новых ряда (4,5), (4,8) и (4,12), которые я позволил себе назвать *микрофонными функциями*.

§ 2. Несложные выкладки позволяют представить искомое решение в форме

$$i=\frac{E}{L}\int\limits_{-\infty}^{0}\text{xp}\left\{\frac{R}{L}\xi-\frac{r}{\omega L}[\sin\omega(t+\xi)-\sin\omega t]\right\}d\xi. \tag{2,1}$$

Вместо разложения (2,1) в тригонометрический ряд мы используем другой прием.

§ 3. Допустим, что решение (1,1) можно представить в виде ряда

$$i=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}J_{ns}\sin n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}J_{nc}\cos n\omega t. \tag{3,1}$$

Внеся (3,1) в (1,1), получим новое уравнение. Приравняв в нем коэффициенты при одинаковых функциях слева и справа от знака равенства, получим такую систему уравнений:

Функция	Уравнение	
Постоян.	$E = RI_0 - {}^1/_2\, rJ_{1c}.$	(3,2)
$\sin\omega t$	$0 = RJ_{1s} - \omega LJ_{1c} - {}^1/_2\, rJ_{2s}.$	(3,3)
$\cos\omega t$	$0 = RJ_{1c} + \omega LJ_{1s} - rI_0 - {}^1/_2\, rJ_{2c}.$	(3,4)
$\sin n\omega t$	$0 = RJ_{ns} - n\omega LJ_{nc} - {}^1/_2\, rJ_{(n-1)s} - {}^1/_2\, rJ_{(n+1)s}, \quad n > 1.$	(3,5)
$\cos n\omega t$	$0 = RJ_{nc} + n\omega LJ_{ns} - {}^1/_2\, rJ_{(n-1)c} - {}^1/_2\, rJ_{(n+1)c}, \quad n > 1.$	(3,6)

§ 4. Решить эту систему непосредственно весьма трудно. Мы прибегаем к обходному способу, а именно, мы определим независимо от системы уравнений (3,2)—(3,6) величины I_0, J_{1s} непосредственно из уравнения (1,1). Положим

$$i = i_0 + i_1 + \ldots + i_n + \ldots \tag{4,1}$$

Внеся (4,1) в (1,1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[L\frac{di_n}{dt} + (R - r\cos\omega t)\ i_n \right] = E. \tag{4,2}$$

Пусть функции $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{di_0}{dt} + Ri_0 = E, \\ &L\frac{di_n}{dt} + Ri_n = i_{(n-1)}\ r\cos\omega t, \end{aligned}\right\} n > 0 \tag{4,3}$$

полученным из (4,2).

Вычисляя каждый раз периодическое решение, получим:

$$I_0 = \frac{E}{R} M_0(r), \tag{4,4}$$

где

$$M_0(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{r^{2n}}{(Z_1 Z_2 \ldots Z_n)^2} \tag{4,5}$$

названа *микрофонной функцией нулевого порядка*,

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}, \quad n = 1,\ 2, \ldots \tag{4,6}$$

$$J_{1s} = 2\frac{E}{R}\frac{\omega L}{r} M_1(r), \tag{4,7}$$

где

$$M_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{r^{2n}}{(Z_1 Z_2 \ldots Z_n)^2} \tag{4,8}$$

названа *микрофонной функцией первого порядка*.

Из (3,2)

$$J_{1c} = \frac{2E}{r} M_2(r), \tag{4,9}$$

где

$$M_2(r) = M_0(r) - 1 \tag{4,10}$$

названа *микрофонной функцией второго порядка.*

Из (3,3)

$$J_{2s} = E\omega L\left(\frac{2}{r}\right)^2 M_3(r), \tag{4,11}$$

где

$$M_3(r) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{r^{2n}}{(Z_1 Z_2 \ldots Z_n)^2} \tag{4,12}$$

названа *микрофонной функцией третьего порядка.*

Иначе

$$M_3(r) = M_1(r) - M_2(r). \tag{4,13}$$

Из (3,4),(3,5) и (3,6) имеем:

$$J_{2c} = \frac{2}{r}(\omega L J_{1s} + RJ_{1c} - rI_0), \tag{4,14}$$

$$J_{ns} = \frac{2}{r}\left[-(n-1)\omega L J_{(n-1)c} + RJ_{(n-1)s} - {}^1/_2\, rJ_{(n-2)s}\right], \quad n > 2, \tag{4,15}$$

$$J_{nc} = \frac{2}{r}\left[(n-1)\omega L J_{(n-1)s} + RJ_{(n-1)c} - {}^1/_2\, rJ_{(n-2)c}\right], \quad n > 2. \tag{4,16}$$

Сходимость (4,5) и (4,8) доказывается по признаку Даламбера.

§ 5. Общее решение уравнения (1,1) с начальными условиями удобно представить в таком виде:

$$i = Ce^{-\frac{R}{L}t + \frac{r}{\omega L}\sin\omega t} + I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{ns}\sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} J_{nc}\cos n\omega t, \tag{5,1}$$

где C — постоянная интегрирования.

При $t=0$ ток $i=0$. Поэтому из (5,1) имеем

$$C = -\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{nc}\right). \tag{5,2}$$

Это дает возможность оценить быстроту установления стационарного режима.

§ 6. Из формул (4,6), (4,7), (4,4) и (3,2) — (3,6) имеем при $L=0$:

$$Z_n = R, \qquad J_{ns} = 0, \tag{6,1}$$

$$I_0 = \frac{E}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \tag{6,2}$$

$$J_{nc} = 2I_0\alpha^n, \tag{6,3}$$

где

$$\alpha = \frac{r}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}. \tag{6,4}$$

Эти результаты полностью совпадают с найденными прежде [7].

§ 7. Ряд электротехнических приложений приведенных формул при $L > 0$ дает те же результаты, какие получаются непосредственно из законов физики. Это также убеждает нас в их верности.

§ 8. Я. З. Цыпкин (9), идя по пути, намеченному Помеем (8), решил уравнение (1,1) при $R(t) = R + r \sin \omega t$ с применением функций Бесселя.

Выражаю глубокую благодарность за ценные указания и внимание к этой работе акад. С. Л. Соболеву и В. Ю. Ломоносову.

Поступило
23 XI 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kohen, Proc. Inst. Radio Eng., **3**, 406 (1915). [2] E. C. Wente, Phys. Rev., **10**, 1, 39 (1917). [3] H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung, 1907. [4] E. Waetzman, Phys. Z., **15**, 638 (1914). [5] B. Liebowitz, Proc. Inst. Radio Eng., **3**, 385 (1915). [6] A. I. Jakovleff, Z. Hochfrequenztechnik, **30**, 5, 151 (1927). [7] А. И. Яковлев, Микрофонные цепи, М., 1938. [8] I. B. Pomey, Rev. Gen. Electr., **31**, 8, 235 (1932); **31**, 15, 475 (1932); **39**, 20, 720 (1936). [9] Я. З. Цыпкин, Электричество, **8**, 61 (1946).